Thomae e Com.tis Valpergiae et Maxini

METHODUS
Incrementorum
Directa & Inversa.

AUCTORE

BROOK TAYLOR, LL. D. &
Regiæ Societatis Secretario.

LONDINI
Typis *Pearsonianis* : Prostant apud *Gul. Innys* ad Insignia Principis in Cœmeterio *Paulino*. MDCCXV.

ILLUSTRISSIMÆ

Societati Regali,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

Ad Philosophiam Promovendam

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D. D. D.

BROOK TAYLOR.

LECTORI.

I*N Methodo hâc Incrementorum quantitates considero ut Incrementis auctas vel Decrementis imminutas, & ex datis relationibus Integralium quæro relationes Incrementorum, atque vicissim ex datis relationibus Incrementorum quæro quantitates ipsas Integrales. Horum usus in rebus Mathematicis satis latè patet; sed in eo maximè elucet, quod hinc facile deriventur omnes proprietates Fluxionum. Clarissimus Dominus* Newtonus *quantitates Mathematicas considerando ut motu perpetuo descriptas, per Methodum Fluxionum ex rationibus primis Incrementorum nascentium quærit rationes velocitatum quibus magnitudines describuntur, & vicissim ex velocitatibus hisce (quas Fluxiones quantitatum vocat) quærit magnitudines quantitatum ipsarum descriptarum. Hoc idem, sed minus generaliter, fecere alii (ut Veteres in Methodo exhaustionum,* Cavallerius *&* Wallisius *in Methodis summatoriis.) Veteres investigando magnitudines figurarum inscripserunt & circumscripserunt figuras ex partibus finitis & cognitis constantes, & partium istarum numerum auxerunt & magnitudinem minuerunt, donec differentia inter earum summam & figuram quæsitam esset minor quâvis datâ.* Cavallerius *& Recentiores contemplarunt partes istas ut in infinitum diminutas. Sed hi omnes, contemplando geneses quantitatum per additiones partium, non satis consuluerunt severæ isti ἀκριβείᾳ Geometrarum. Partes enim, ut Methodus sit accurata, deberent esse primæ nascentes; at nullæ sunt ejusmodi partes in rerum Naturâ, sunt tantum rationes primæ partium nascentium. Ergò* Newtonus *missis partium magnitudinibus, missis & earum summis, rationes ultimas partium evanescentium, & primas nascentium introduxit, & in his rationibus Analysin suam fundavit. Sumptis itaque ra-*

tionibus primis Incrementorum naſcentium, vel ultimis evaneſcentium, accommodantur omnes Concluſiones Methodi Incrementorum ad Methodum Fluxionum, Incrementis jam evaneſcentibus, & Integralibus in fluentes converſis. Et hoc pacto vitatur omnis conſideratio quantitatum infinitè (ſeu, ut aliqui loqui amant, indefinitè) parvarum. Nam in Methodo Fluxionum, ut Concluſiones ſint veræ & omnino accuratæ, partes ſeu incrementa concipienda ſunt, non ut perexigua, ſeu infinitè parva, ſed ut reverâ nulla: Rationes enim primæ non ſunt, niſi in ipſo momento ubi quantitates naſci incipiunt; ubi ſemel naſcuntur jam deſinunt eſſe primæ. Similiter & rationes ultimæ non ſunt, niſi ubi quantitates jam evaneſcunt & fiunt nullæ. Facilioris tamen conceptûs gratiâ poſſunt pro Flxionibus ſumi augmenta illa naſcentia, quæ Newtonus *momenta vocat, atque deſignat literâ o Fluxionibus appoſitâ. Et in hoc modo concipiendi facilius cernitur relatio inter Methodum hanc Incrementorum & Methodum Fluxionum. Quapropter etiam in Propoſitionibus nonnullis generalibus ſpectantibus ad Incrementa quævis in genere, vel finitæ magnitudenis, vel infinitè parva, exempla damus in Fluxionibus, vice tamen Fluxionum ſumendo momenta.*

Methodus

Methodus Incrementorum.

PARS PRIMA.

Ubi traduntur Præcepta, cùm Methodi Incrementorum in genere, tùm Methodi Fluxionum.

INTRODUCTIO.

Quantitates indeterminatas in his confidero ut Incrementis perpetuò auctas, vel Decrementis diminutas. Indeterminatas ipsas Integrales designo literis z, x, v, &c. earumque Incrementa, seu partes mox addendas designo iisdem literis a parte inferiori punctatis $\underset{\cdot}{z}$, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot}{v}$, &c. Quorum Incrementorum Incrementa, seu Integralium ipsarum Incrementa secunda designo iisdem literis bis punctatis $\underset{\cdot\cdot}{z}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. Incrementa tertia designo literis ter punctatis $\underset{\therefore}{z}$, $\underset{\therefore}{x}$, $\underset{\therefore}{v}$, &c. & sic porrò. Quinetiam majoris generalitatis gratiâ, vice punctorum nonnunquam scribo characteres punctorum numeros designantes: Sic si n sit 3, per $\underset{n}{x}$, vel $\underset{3}{x}$ designatur $\underset{\therefore}{x}$; si n sit o, per $\underset{n}{x}$, vel $\underset{o}{x}$ designatur ipsa Integralis x; si n sit -1, per $\underset{n}{x}$, seu $\underset{-1}{x}$ designatur quantitas cujus Incrementum primum est x; & sic de cæteris. Sæpè etiam in hòc Tractatu quantitatis ejusdem variabilis valores aliquot successivos designo per eandem literam lineolis insig-

insignitam; nempe præsentem valorem designando per literam simplicem, præcedentes per accentus graves suprascriptos, & subsequentes per lineolas subscriptas. Sic exempli gratiâ sunt $\overset{\backslash\backslash}{x}$, $\overset{\backslash}{x}$, x, $\underset{\backslash}{x}$, $\underset{\backslash\backslash}{x}$, ejusdem quantitatis valores quinque successivi, quorum est x valor præsens, sunt $\overset{\backslash}{x}$ & $\overset{\backslash\backslash}{x}$ valores præcedentes, atque $\underset{\backslash}{x}$ & $\underset{\backslash\backslash}{x}$ valores subsequentes.

II. Fluxiones, quæ sunt in ratione primâ Incrementorum nascentium, vel ultimâ evanescentium, designantur punctis indicibus Incrementorum ad literarum partes superiores transpositis: Sic est $\dot{x}$ Fluxio prima ipsius x; $\ddot{x}$ est ejusdem Fluxio secunda; $\dddot{x}$ Fluxio tertia; & sic porrò. Fluentes etiam nonnunquam designantur per lineolas (similes accentûs acuti) literis suprascriptas: Sic $\acute{x}$ designat fluentem ipsius x, seu quantitatem cujus Fluxio prima est x; $\overset{\prime\prime}{x}$ designat fluentem secundam ipsius x, seu quantitatem cujus Fluxio secunda est x; & sic porrò. Et hæ lineolæ in indicibus fluentûm vim habent punctorum (ut ita dicam) negativorum in indicibus Fluxionum: Sic si sit $n=2$, & $\overset{n}{x}$ designet $\ddot{x}$, mutato signo designabitur $\overset{\prime\prime}{x}$ per $\overset{-n}{x}$. Porrò fluentes quantitatum compositarum designantur nonnunquam per quantitates ipsas parallelogrammis inclusas; sic designat $\boxed{xz^2}$ fluentem ipsius xz^2.

PROP.

PROP. I. PROB. I.

Datâ Æquatione quantitates variabiles involvente invenire Incrementa.

IN Æquatione propositâ vice quantitatis cujusvis variabilis scribe eandem quantitatem proprio Incremento auctam, & resultabit Æquatio nova; unde ablatâ Æquatione priori, residuum erit Æquatio, per quam dabitur relatio Incrementorum.

Exempli gratiâ sit Æquatio $x^3 - xv^2 + a^2z - b^3 = o$, ubi a & b sunt quantitates determinatæ & immutabiles. Itaque pro x, v, & z scriptis $x + \underset{\cdot}{x}$, $v + \underset{\cdot}{v}$, & $z + \underset{\cdot}{z}$, prodit Æquatio nova $x^3 + 3\underset{\cdot}{x}x^2 + 3x^2\underset{\cdot}{x}$ $+ \underset{\cdot}{x}^3 - xv^2 - \underset{\cdot}{x}v^2 - 2xv\underset{\cdot}{v} - x\underset{\cdot}{v}^2 - 2\underset{\cdot}{x}v\underset{\cdot}{v} - \underset{\cdot}{x}\underset{\cdot}{v}^2 + a^2z + a^2\underset{\cdot}{z}$ $- b^3 = o$; unde subductâ Æquatione priori, residuum $3\underset{\cdot}{x}x^2 + 3x^2\underset{\cdot}{x}$ $+ \underset{\cdot}{x}^3 - \underset{\cdot}{x}v^2 - 2xv\underset{\cdot}{v} - x\underset{\cdot}{v}^2 - 2\underset{\cdot}{x}v\underset{\cdot}{v} - \underset{\cdot}{x}\underset{\cdot}{v}^2 + a^2\underset{\cdot}{z} = o$ fit Æquatio, cujus ope dantur relationes Incrementorum.

In hâc Solutione, si pro Incrementis nascentibus scribatur nihil, & pro earum rationibus primis substituantur rationes Fluxionum, eo pacto dabuntur relationes Fluxionum. Et potest operatio simul & semel perfici, ab initio neglectis terminis, cùm Æquationis propositæ, tùm & ob Incrementa nascentia evanescentibus, omninò ut docetur in Regulâ *Newtonianâ*, quæ hæc est;

" Multiplicetur omnis Æquationis terminus per indicem
" dignitatis quantitatis cujusque fluentis quam involvit, &
" in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus
" in Fluxionem suam; & aggregatum factorum sub pro-
" priis signis erit Æquatio nova, per quam definietur
" relatio Fluxionum.

EXPLICATIO.

" Sunto a, b, c, d, &c. quantitates determinatæ & im-
" mutabiles, & proponatur Æquatio quævis quantitates fluen-

" tes

" tes z, y, x, &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = o$. Multi-
" plicentur termini primò per indices dignitatûm x, & in singulis
" multiplicationibus pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis,
" scribatur $\dot{x}$, & summa factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y,
" & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z, & prodibit $a^2\dot{z}$. Ponatur
" summa factorum æqualis nihilo, & habebitur Æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$
" $- 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = o$.

" Ad eundem modum si Æquatio esset $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax - y^2}$
" $- b^3 = o$ produceretur $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\,\dot{\overline{\sqrt{ax - y^2}}} = o$.
" Ubi si Fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax - y^2}}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax - y^2} = z$, &
" erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc Prop.) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$, seu
" $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$, hoc est $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - y^2}} = \dot{\overline{\sqrt{ax - y^2}}}$. Et inde $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$
" $- 2xy\dot{y} + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - y^2}} = o$.

Per operationem repetitam pergitur ad Incrementa, ut & ad Fluxiones secundas, tertias, & sequentes. Sit Æquatio $xz - av = o$. Tum per operationem primam erit $\underset{.}{x}z + x\underset{.}{z} + \underset{.}{x}\underset{.}{z} - a\underset{.}{v} = o$. In hâc Æquatione pro x, $\underset{.}{x}$, z, $\underset{.}{z}$, v, $\underset{.}{v}$ scriptis $x + \underset{.}{x}$, $\underset{.}{x} + \underset{..}{x}$, $z + \underset{.}{z}$, $\underset{.}{z} + \underset{..}{z}$, $v + \underset{.}{v}$, $\underset{.}{v} + \underset{..}{v}$, & subductâ Æquatione, per operationem secundam fiet $2\underset{.}{x}\underset{.}{z} + \underset{..}{x}z + 2\underset{..}{x}\underset{.}{z} + x\underset{..}{z} + 2\underset{.}{x}\underset{..}{z} + \underset{..}{x}\underset{..}{z} - a\underset{..}{v} = o$. Sic in Fluxionibus propositâ eâdem Æquatione, fiet per operationem primam $\dot{x}z + x\dot{z} - a\dot{v} = o$, per secundam $2\dot{x}\dot{z} + \ddot{x}z + x\ddot{z} - a\ddot{v} = o$. Et sic pergere licet ad Incrementa, & ad Fluxiones tertias, quartas, & sequentes.

Sed ubi hoc modo pergitur ad Incrementa, vel ad Fluxiones secundas, tertias, & sequentes, convenit quantitatem aliquam considerare ut uniformiter crescentem, & pro ejus Incrementis, vel Fluxionibus, secundâ, tertiâ, & sequentibus scribere nihil. Sic in Æquatione modò propositâ $xz - av = o$, uniformiter crescente z, erit

per

per operationem secundam $2\underset{.}{x}\underset{.}{z} + \underset{..}{x}z + 2\underset{..}{x}\underset{.}{z} - a\underset{..}{v} = o$. Et in Fluxionibus propositâ eâdem Æquatione, erit per operationem secundam $2\dot{x}\dot{z} + \ddot{x}z - a\ddot{v} = o$, per tertiam $3\ddot{x}\dot{z} + \dddot{x}z - a\dddot{v} = o$. Et in hoc casu potest commodè pro Fluxione datâ $\dot{z}$ scribi 1. Hoc pacto Æquationes prædictæ fiunt $\dot{x}z + x - a\dot{v} = o$, $2\dot{x} + \ddot{x}z - a\ddot{v} = o$, $3\ddot{x} + \dddot{x}z - a\dddot{v} = o$.

PROP. II. PROB. II.

In Æquatione incrementali variabiles quotvis involvente, vice omnium istarum Variabilium substituere totidem novas per eadem Incrementa in ordine inverso crescentes.

SIT x quævis variabilium in Æquatione propositâ, & v nova variabilis in ejus locum substituenda; ita ut dum augetur x, minuatur v per eadem Incrementa. Tum si sit n index infimi Incrementi in Æquatione propositâ, satisfiet Problemati pro x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, &c. scribendo sequentes ipsorum valores; ubi est d quantitas determinata ad libitum sumpta,

$$x = d - v - nv - n.\frac{n-1}{2}\underset{..}{v} - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\underset{...}{v} - \&c.$$

$$\underset{.}{x} = \underset{.}{v} + \overline{n-1}\underset{..}{v} + \overline{n-1}.\frac{n-2}{2}\underset{...}{v} + \overline{n-1}.\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}\underset{::}{v} + \&c.$$

$$\underset{..}{x} = -\underset{..}{v} - \overline{n-2}\underset{...}{v} - \overline{n-2}.\frac{n-3}{2}\underset{::}{v} - \&c.$$

$$\underset{...}{x} = \underset{...}{v} + \overline{n-3}\underset{...}{v} + \&c.$$

& sic porrò.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{r|llll|llll}
 & & A. & & & & B. & & \\
1. & x & - & - & - & v & +\,3\underset{\cdot}{v} & +\,3\underset{\cdot\cdot}{v} & +\,\underset{\because}{v} \\
2. & x & +\,\underset{\cdot}{x} & - & - & v & +\,2\underset{\cdot}{v} & +\,\underset{\cdot\cdot}{v} & \\
3. & x & +\,2\underset{\cdot}{x} & +\,\underset{\cdot\cdot}{x} & - & v & +\,\underset{\cdot}{v} & & \\
4. & x & +\,3\underset{\cdot}{x} & +\,3\underset{\cdot\cdot}{x} & +\,\underset{\because}{x} & v & & &
\end{array}$$

Sit verbi gratiâ $n = 3$, & in tabulis A & B exhibeantur quatuor valores correſpondentes ipſorum x & v in contrario ordine creſcentium; qui per additionem Incrementorum facilè colliguntur. Tum quoniam ex Hypotheſi Incrementâ correſpondentia in utrâque tabulâ ſunt ſemper æqualia, dabitur ſumma duorum quorumvis valorum correſpondentium x & v in his tabulis. Quare ſi ſumma iſta data ſit d, erit

$$\begin{aligned}
x \; - - - - - - - - \; &= d - v - 3\underset{\cdot}{v} - 3\underset{\cdot\cdot}{v} - \underset{\because}{v} \\
x + \underset{\cdot}{x} \; - - - - - - \; &= d - v - 2\underset{\cdot}{v} - \underset{\cdot\cdot}{v} \\
x + 2\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot}{x} \; - - - \; &= d - v - \underset{\cdot}{v} \\
x + 3\underset{\cdot}{x} + 3\underset{\cdot\cdot}{x} + \underset{\because}{x} &= d - v
\end{aligned}$$

Tum ſumendo Differentias harum Æquationum fit

$$\begin{aligned}
\underset{\cdot}{x} \; - - - - - \; &= \underset{\cdot}{v} + 2\underset{\cdot\cdot}{v} + \underset{\because}{v} \\
\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot}{x} \; - - - \; &= \underset{\cdot}{v} + \underset{\cdot\cdot}{v} \\
\underset{\cdot}{x} + 2\underset{\cdot\cdot}{x} + \underset{\because}{x} &= \underset{\cdot}{v}
\end{aligned}$$

Et ſumendo Differentias harum Æquationum fit

$$\begin{aligned}
\underset{\cdot\cdot}{x} \; - - \; &= -\underset{\cdot\cdot}{v} - \underset{\because}{v} \\
\underset{\cdot\cdot}{x} + \underset{\because}{x} &= -\underset{\cdot\cdot}{v}
\end{aligned}$$

Denique

Denique ſumendo Differentias harum Æquationum fit $\underset{\therefore}{x} = \underset{\therefore}{v}$. Sed hi valores ipſorum x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\therefore}{x}$, iidem ſunt, ac in ſolutione jubentur; & eadem eſt argumentatio ubi eſt n alterius cujuſvis valoris. Quare pro ſingulis x, & ſuis Incrementis ſubſtituendo hujuſmodi valores, rectè ſolvitur Problema. Q. E. D.

COROL.

Ob Incrementa evaneſcentia in Fluxionibus Solutio fit ſimplicior, exiſtente $x = d - v$, $\dot{x} = \dot{v}$, $\ddot{x} = -\ddot{v}$, $\dddot{x} = \dddot{v}$, $\ddddot{x} = -\ddddot{v}$, & ſic porrò.

SCHOLIUM.

Poſſunt equidem Æquationes incrementales pro lubitu transformari ope Æquationum aſſumptarum. Sic ſi feceris $x = vv$, capiendo Incrementa (per Prop. 1.) erit $\underset{\cdot}{x} = 2v\underset{\cdot}{v} + \underset{\cdot}{v}\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{x} = 2v\underset{\cdot\cdot}{v} + 4\underset{\cdot\cdot}{v}\underset{\cdot}{v} + \underset{\cdot\cdot}{v}\underset{\cdot\cdot}{v}$, & ſic porrò; unde transformabitur Æquatio pro x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. ſubſtituendo hos ipſorum valores. Idem fiet ſi ſit $x = d - v$. Sed in hoc caſu quoniam eſt $\underset{\cdot}{x} = -\underset{\cdot}{v}$, erit $\underset{\cdot}{v}$ quantitas negativa; quare quantitas ſubſtituta v non erit quantitas reverâ increſcens in Æquatione transformatâ, ſed decreſcens, exiſtente $\underset{\cdot}{v}$ ipſius Decremento proximè auferendo. Proinde ſi cupis Æquationem ita transformare, ut quantitates v decreſcant creſcentibus x, & tamen in Æquatione transformatâ ſint $\underset{\cdot}{v}$ ipſarum v vera Incrementa, ut ſunt $\underset{\cdot}{x}$ vera Incrementa ipſius x, procedendum erit per hanc Propoſitionem.

PROP. III. PROB. III.

Æquationem fluxionalem, in quâ sunt fluentes tantùm duæ z & x, quarum z fluit uniformiter, ita transformare ut fluat x uniformiter.

SOlvitur Problema pro $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, &c. substituendo sequentes ipsorum valores, nempe $\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}}$, $\dddot{x} = \frac{-\dddot{z}\dot{z}\dot{x} + 3\ddot{z}^2\dot{x}}{\dot{z}^2}$, $\ddddot{x} = \frac{-\ddddot{z}\dot{z}^2\dot{x} + 10\dddot{z}\ddot{z}\dot{z}\dot{x} - 15\ddot{z}^3\dot{x}}{\dot{z}^3}$, &c.

DEMONSTRATIO.

Sunto A, B, C, D, E, &c. quantitates ex x & datis compositæ, & sint $\dot{A} = B\dot{x}$, $\dot{B} = C\dot{x}$, $\dot{C} = D\dot{x}$, $\dot{D} = E\dot{x}$, & sic porrò. Tum si ponatur $z = A$, erit $\dot{z} = B\dot{x}$ & (fluente uniformiter z,) $o = (B\ddot{x} + \dot{B}\dot{x} =)\ B\ddot{x} + C\dot{x}^2$, $o = (B\dddot{x} + \dot{B}\ddot{x} + 2C\dot{x}\ddot{x} + \dot{C}\dot{x}^2 =)\ B\dddot{x} + 3C\dot{x}\ddot{x} + D\dot{x}^3$, $o = B\ddddot{x} + 4C\dot{x}\dddot{x} + 3C\ddot{x}^2 + 6D\dot{x}^2\ddot{x} + E\dot{x}^4$, & sic porro (per Prop. I.) Sed ubi fluit uniformiter x, & fluit inequaliter z, sunt $B = \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, $C = \frac{\ddot{z}}{\dot{x}^2}$, $D = \frac{\dddot{z}}{\dot{x}^3}$, $E = \frac{\ddddot{z}}{\dot{x}^4}$, &c. Itaque pro B, C, D, E, &c. scriptis his ipsorum valoribus, invenientur ipsorum $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, &c. valores, ut suprà exhibentur. Quibus proinde in Æquatione substitutis, deinde fluet x uniformiter, atque z inequaliter. Q. E. D.

SCHO.

SCHOLIUM.

Et eodem modo transformari poteſt Æquatio, quæ plures fluentes involvit v, y, &c. præter z & x; modò nullius v, y, &c. Fluxio ultra primam in Æquatione involvatur. Quare ſi in Æquatione, quam per hanc Propoſitionem transformare velis, ſint quædam ipſorum v, y, &c. Fluxiones ſecundæ, tertiæ, & ſequentes, primùm eliminandæ ſunt Fluxiones iſtæ ope Æquationum datarum, & deinde procedet transformatio per hanc Propoſitionem facta.

PROP. IV. THEOR. I.

Datâ Æquatione præter variabilem z, cujus valores omnes dantur, involvente alterius variabilis x Incrementa aliquot x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. quarum prima ſit x_m, & ultima x_{m+n}, (ubi etiam deeſſe poſſunt z, & omnia Incrementa x_{m+1}, x_{m+2}, &c. inter x_m & x_{m+n} mediæ;) atque datis præterea $m + n$ conditionibus ſpectantibus ad $m + n$ datos valores z, & ad totidem valores correſpondentes quovis modo ſumptos inter valores ipſorum x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, &c. in infinitum; ita tamen ut non plures quam n valores ſumantur ipſius x_m, vel x_{m+1}, vel cujuſvis Incrementi inferioris, vel inter plura Incrementa x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, & inferiora; nec plures quam $n + 1$ valores ſumantur ipſius x_{m-1}; nec plures quam $n + 2$ valores ſumantur ipſius x_{m-2}; atque ſic deinceps; dabuntur omnes valores ipſius x ex datis omnibus valoribus z.

DEMONSTRATIO.

Per Æquationem datam datur x_{m+n} expreſſa per z & per Incrementa x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. ipſo x_{m+n} ſuperiora. Unde (per Prop. 1.) dabitur proximum Incrementum x_{m+n+1} per eaſdem quantitates expreſſum; deinde (per eandem Propoſitionem) dabitur proximum Incrementum x_{m+n+2} per eaſdem quantitates expreſſum; & operationibus in infinitum continuatis dabuntur omnia Incrementa ipſo x_{m+n} inferiora expreſſa per eaſdem quantitates z, & per Incrementa x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. ipſo x_{m+n} ſuperiora. Si itaque ſint a, & c, $\underset{.}{c}$, $\underset{..}{c}$, &c. ipſorum z, & x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, &c. certi quidam valores correſpondentes, dabuntur omnia c_{m+n}, c_{m+n+1}, c_{m+n+2}, &c. in infinitum expreſſa per a, & c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, &c. ipſo c_{m+n} ſuperiora. Unde per additionem continuam dabuntur omnes valores ipſius x_m in tabulâ antè continuatâ. Et pro z & x ſubſtitutis novis variabilibus (per Prop. 2.) eodem modo dabuntur omnes valores x_m in tabulâ retrò continuatâ. Deinde per additionem & ſubductionem continuam dabuntur omnes valores Incrementi proximè ſuperioris x_{m-1}, expreſſi per eaſdem quantitates, & per c_{m-1}: Et deinde eodem modo dabuntur omnes valores Incrementi adhuc ſuperioris x_{m-2} expreſſi per eaſdem quantitates & per c_{m-2}. Et ſiç pergendo dabuntur tandem omnes

valores

valores ipsius x expressi per a & per terminos c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. ipso c_{m+n} superiores. Sed terminorum c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. ante c_{m+n} numerus est $m+n$. Quare per conditiones numero $m+n$ determinabuntur omnes c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. adeoque dabuntur omnes x. Q. E. D. Sed quoniam valores ipsorum x_{m}, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. includunt terminos tantùm c_{m}, c_{m+1}, c_{m+2}, &c. quorum numerus est tantùm n; ergò nequeunt plures quam n conditiones applicari ad valores Incrementi x_{m} & inferiorum. Item quoniam valores ipsius x_{m-1} includunt terminos tantùm c_{m-1}, c_{m}, c_{m+1}, &c. quorum numerus est tantùm $n+1$, nequeunt plures conditiones quam $n+1$ applicari ad valores Incrementi x_{m-1}: Et similis est argumentatio in cæteris. Unde per hoc Theorema rectè determinantur data, & eorum conditiones, in Æquationibus duas tantùm Integrales & earum Incrementa involventibus.

PROP. V. THEOR. II.

Datis duabus Æquationibus, præter z, cujus valores omnes dantur, involventibus ipsorum v & x Incrementa aliquot, quorum suprema in utrâque Æquatione sint v_{p} & x_{π}, & infima in unâ Æquatione sint v_{p+a}, & $x_{\pi+\alpha}$, & infima in alterâ Æquatione sint v_{p+b}, & $x_{\pi+\beta}$; si sit m numerorum $a+\beta$ & $\alpha+b$ maximus, dabuntur omnes v per conditiones numero $m+p$ spectantes ad $m+p$ valores ipsius z, & ad totidem valores respondentes ipsorum v, $\underset{.}{v}$, $\underset{..}{v}$, &c. & x_{π}, $x_{\pi+1}$, $x_{\pi+2}$, &c. atque dabuntur omnes x per conditiones numero $m+\pi$ spectantes ad $m+\pi$ valores ipsius z, & ad totidem valores respondentes ipsorum x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, &c. & v_{p}, v_{p+1}, v_{p+2}, &c. Ita quidem ut conditionum numerus non amplius m applicari possit ad valores Incrementorum v_{p} & x_{π}, & inferiorum, reliquis conditionibus applicandis ad valores ipsorum x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, &c. v, $\underset{.}{v}$, $\underset{..}{v}$, &c. ipsis x_{π} & v_{p} superiorum juxta leges valorum Incrementorum ipsâ x_{m} superiorum in Propositione quartâ, hoc est, ut ad minimum unus valor sit ipsius x, duo valores sint ipsorum x & $\underset{.}{x}$, tres valores sint ipsorum x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$; & sic de v, $\underset{.}{v}$, $\underset{..}{v}$, &c. atque deinceps.

DEMONSTRATIO.

Nam per Æquationes datas, & per Æquationes novas inde derivatas (per Prop. 1.) eliminato v cum ſuis Incrementis, dabitur Æquatio præter z involvens tantùm Incrementa ipſius x, quorum ſupremum eſt x_{π}, & infimum eſt $x_{\pi+m}$. Et proximè antè inventam Æquationem iſtam dabitur Æquatio præter z & ipſius x Incrementa x_{π} & inferiora, involvens tantùm v_{p}. Unde dabitur v_{p} expreſſum per z, & per ipſius x Incrementa x_{π} & inferiora. Sed ſi ſint a, & c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. ipſorum z, & x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. valores quidam correſpondentes, dabuntur omnia Incrementa x_{π} & inferiora expreſſa per a, & per ipſorum c_{π}, $c_{\pi+1}$, $c_{\pi+2}$, &c. numerum m (per Prop. 4.) Quare etiam dabuntur omnia v_{p} per eaſdem quantitates expreſſa. Unde ſi ſint d, $\underset{\cdot}{d}$, $\underset{\cdot\cdot}{d}$, &c. ipſorum v, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. valores ipſius z valori a reſpondentes, & continuetur ſeries d, $\underset{\cdot}{d}$, $\underset{\cdot\cdot}{d}$, &c. uſque d_{p-1} incluſivè, ut ſit terminorum numerus p, dabuntur omnes v expreſſæ per quantitates d, $\underset{\cdot}{d}$, $\underset{\cdot\cdot}{d}$, &c. & c_{π}, $c_{\pi+1}$, $c_{\pi+2}$, &c. quorum omnium numerus eſt $m+p$. Exprimentur autem omnes valores ipſius x per quantitates c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. quarum numerus eſt $m+\pi$. Quare determinatis omnibus c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. per conditiones numero $m+\pi$ ſpectantes ad valores x & ſuorum Incrementorum; deinde determinabuntur omnes d, $\underset{\cdot}{d}$, $\underset{\cdot\cdot}{d}$, &c. per alias conditiones numero p ſpectantes ad valores ipſorum v, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. vel determinatis

minatis omnibus d, $\underset{\cdot}{d}$, $\underset{\cdot\cdot}{d}$, &c. & aliquot ex terminis c_{π}, $c_{\pi+1}$, $c_{\pi+2}$, &c. per conditiones ſpectantes ad valores v, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. reliqui terminorum c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. determinabuntur per conditiones ſpectantes ad valores x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. Unde per conditiones $m + p$ dabuntur omnes v, & per conditiones $m + \pi$ dabuntur omnes x, (Q. E. D.) & per conditiones omninò $m + p + \pi$ dabuntur omnes cùm v, tùm x. Quomodo autem conditiones applicandæ ſint ad valores v & x, & ſuorum Incrementorum ipſis v_p & x_π ſuperiorum, ſatis conſtat ex Propoſitione quartâ.

SCHOLIUM.

Ad eundem modum per eliminationes variabilium etiam pergere licet ad inventionem conditionum, quibus aſtringi poſſunt tres, vel quatuor, vel plures Æquationes incrementales involventes tres, vel quatuor, vel plures variabiles præter z, cujus valores omnes dantur.

Sit Æquatio $z^2\underset{\cdot\cdot}{x} - zx_4 + b^3 = o$. In hâc Æquatione ad mentem Propoſitionis quartæ eſt $\underset{\cdot\cdot}{x}$ idem ac x_m, atque x_4 idem ac x_{m+n}; unde ſunt $m = 2$, & $n = 2$. Quare per conditiones quatuor dabuntur omnes x, ex datis omnibus z. Et quoniam eſt $\underset{\cdot\cdot}{x}$ primum omnium x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. quæ in Æquatione occurrunt, ad minimum duæ conditiones applicandæ ſunt ad valores ipſorum x & $\underset{\cdot}{x}$; ita, ut vel una conditio applicetur ad valorem x, & alia ad valorem $\underset{\cdot}{x}$, vel utraque applicetur ad valorem x. Reliquæ autem conditiones poſſunt pro lubitu applicari ad valores omnium x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. in infinitum; ita, ut vel una conditio applicetur ad unum ex iſtis terminis, & alia ad alium; vel etiam ut omnes conditiones applicentur ad diverſos valores ejuſdem termini.

Sint

Sint duæ Æquationes $\underset{..}{x} - \underset{.}{v} + \underset{.:}{vz} = 0$, & $\underset{.:}{xz} - \underset{..}{v} = 0$. In his Æquationibus ad mentem hujus Propositionis est $p = 1$, $\pi = 2$, $a = 2$, $\alpha = 0$, $b = 1$, $\beta = 1$. Unde fit $a + \beta = 3$ & $\alpha + b = 1$, adeoq; $m = 3$ $(= a + \beta,)$ atque $m + p = 4$, $m + \pi = 5$, & $m + p + \pi = 6$. Proinde per quatuor conditiones dabuntur omnes valores v, per quinque dabuntur omnes x, & per sex conditiones dabuntur omnes cùm x, tùm v. Quarum conditionum ad minimum una referenda est ad valorem v, duæ ad valores x & $\underset{.}{x}$, reliquis tribus utcunque applicandis ad valores Incrementorum $\underset{.}{v}$, $\underset{..}{x}$, & inferiorum.

Sint Æquationes fluxionales duæ $\dot{v}^2 - \dot{x}^2 - \dot{z}^2 = 0$, & $z\dddot{v} - z\dot{x}^2\ddot{x} - x\overset{4}{x} = 0$. Tum ad mentem hujus Propositionis erunt $v_{p} = \dot{v}$, $x_{\pi} = x$, $v_{p+a} = \dot{v}$, $x_{\pi+\alpha} = \dot{x}$, $v_{p+b} = \dddot{v}$, & $x_{\pi+\beta} = \overset{4}{x}$; adeoque $p = 1$, $\pi = 0$, $a = 0$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $\beta = 4$, $a + \beta = 4$, $\alpha + b = 3$; unde fit $m = 4$, $m + p = 5$, $m + \pi = 4$, atque $m + p + \pi = 5$. Dabuntur ergò omnes v & x ex datis omnibus z per conditiones omninò quinque; quarum ad minimum una pertinet ad valorem ipsius v, reliquæ possunt utcunque applicari ad valores ipsorum v, x, & Fluxionum suarum. Proinde si curvæ duæ sint describendæ, quarum ordinatæ sint v & x, & abscissa communis z, descriptâ curvâ cujus ordinata est v per quinque puncta data; vel per quatuor puncta & secante quintam ordinatam in angulo dato; vel in genere quæ transeat per unum punctum datum, & quatuor ordinatas positione datas secet vel in punctis, vel in angulis datis, vel in earum extremitatibus habeat curvaturam datam, vel habeat symptomata quædam curvaturæ pendentia a valoribus Fluxionum $\ddot{v}$, $\dddot{v}$, & inferiorum; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ. Vel etiam si describatur altera curva, cujus ordinata est x; ita, ut quatuor ordinatas vel secet in punctis datis, vel alias secet in punctis, alias in angulis datis; vel in earum extremitatibus curvaturas datas habeat, vel habeat alia quævis symptomata curvaturæ pendentia a Fluxionibus tertiis, quartis, & inferioribus; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ ex dato præterea uno valore v. Et modò detur una conditio respiciens valorem v, conditiones reliquæ poterunt pro lubitu distribui inter valores ordinatarum x & v, & Fluxionum suarum.

Porrò in his casibus possunt duo vel plures dati valores z inter se æquari, vel (quod idem est in Geometriâ) possunt duæ vel plures ex ordinatis positione datis coincidere. Sed hoc pendet a certis conditionibus petendis ex naturâ Æquationum quarumvis propositarum. Sic propositis duabus Æquationibus $xv = z$ & $\dot{x}z + \dddot{x} - \ddot{v}\overset{4}{v} = 0$, per hanc propositionem erunt conditiones quatuor, quæ possunt pro lubitu applicari ad valores x & v, & Fluxionum suarum. Sed ob Æquationem primam $xv = z$ non possunt coincidere ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores utriusque v & x; nec ob Æquationem secundam possunt coincidere omnes quatuor ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium $\dot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddot{v}$, $\overset{4}{v}$; nam datis simul utrisque x & v determinatur z per Æquationem primam; & datis simul omnibus $\dot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddot{v}$, $\overset{4}{v}$, item determinatur z per Æquationem secundam; utrumque contra Hypothesin. Eodem modo capiendo Fluxionem Æquationis primæ (pro $\dot{z}$ scripto 1 ut prius) invenies $\dot{x}v + x\dot{v} = 1$; unde etiam constat non posse coincidere omnes ordinatas, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium x, $\dot{x}$, v, $\dot{v}$. Et iterum capiendo Fluxiones Æquationum propositarum forsan dabuntur alii limites hujusmodi conditionum.

ordinariis

Adhæc, ut in Æquationibus integrales tantùm involventibus, sic in Æquationibus incrementalibus, quantitates variabiles sunt certis limitibus obnoxiæ. Sit exemplum in Æquatione fluxionali $x^2 - a\ddot{x} + z = 0$.

$+ z = o$. Hinc eſt $x = \sqrt{a\ddot{x} - z}$; unde erit x (adeoque & omnes ipſius Fluxiones) impoſſibilis ubi eſt $a\ddot{x} < z$. Ejuſdem Æquationis Fluxio ſecunda eſt $2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} - a\overset{4}{x} = o$; unde fit $\dot{x} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a\overset{4}{x} - x\ddot{x}}$; erit ergò ſemper $x\ddot{x} > \tfrac{1}{2}a\overset{4}{x}$. Et eodem modo per ulteriores Fluxiones Æquationis propoſitæ forſan invenies alios limites variabilium.

LEMMA I.

In Æquatione plura ejuſdem quantitatis variabilis Incrementa involvente, per nullam regulam generalem certò definiri poteſt ad quot dimenſiones aſcendat quantitas illa in Æquatione integrali definiente ejus relationem ad alias quantitates variabiles.

In Æquatione fluxionali $\ddot{x}x + \dot{x}\dot{x} + n\ddot{x}z + \dot{x}\dot{z} = o$, quantitates ſunt ſemel tantùm affectæ, & ubi eſt $n = 2$, datur x ex dato z per Æquationem quadraticam; ſed tamen ſi fiat $n = 3$, non dabitur x, niſi per Æquationem cubicam; ſi $n = 4$, non dabitur x, niſi per Æquationem biquadraticam; ſi $n = \frac{1}{3}$, non dabitur x, niſi per Æquationem quinque dimenſionum: Denique ſi terminorum reliquorum coefficientes fiant generales, ut ſit $\ddot{x}x + m\dot{x}^2 + n\dddot{x}z + p\dot{x}\dot{z} = o$, dubito an dimenſiones Æquationis quæſitæ per ullam certam legem definiri poſſint, ſi quidem omninò dari poteſt x ex dato z per Æquationem terminorum numero finitam. Sit alia Æquatio $4x^3\dot{z}^2 - 4x^2z^2 = \overline{1 + z^2}|^{\dot{2}}x^2$. In hâc Æquatione aſcendit x ad tertiam dignitatem, & aſcendit $\dot{x}$ ad ſecundam; attamen datur x ex datâ z per Æquationem duarum dimenſionum, cujus radix eſt $x = \dfrac{1 + z^2}{\overline{a + \sqrt{1 - a^2z}}|^2}$. Mutatis verò coefficientibus haùd certò ſcio an dari poſſit x ex dato z per Æquationem finitam.

PROP.

PROP. VI. PROB. IV.

Datis tot Æquationibus, quantitates integrales & Incrementa utcunque promiſcuè involventibus, quot ſunt variabiles x, v, y, &c. ad z referendæ, cujus valores omnes dantur; invenire relationes Integralium per Æquationes ab Incrementis liberas, quæ per coefficientes invariabiles indeterminatas adaptari poſſint ad conditiones Problematis per has Æquationes ſolvendi.

SOLUTIO.

Tenta num Æquatio aliqua propoſita, vel ejus multiplex, vel ſubmultiplex aliqua ſit cognitum aliquod Incrementum quantitatis alicujus cognitæ. Hoc ſi ſit, vice iſtius Æquationis propoſitæ ſubſtitue quantitatem illam cognitam factam æqualem quantitati cujus Incrementum primum, vel ſecundum, vel aliud quoddam eſt nihil; prout Æquatio propoſita, vel ejus multiplex, vel ſubmultiplex ſit Incrementum primum, vel ſecundum, vel aliud quoddam quantitatis iſtius cognitæ. Hoc idem facto in omnibus Æquationibus propoſitis, ſi Æquationes inventæ integrales tantùm involvunt, dabitur Solutio in terminis numero finitis; quæ per coefficientes indeterminatos in quantitatibus aſſumptis accommodabitur ad conditiones Problematis. Q. E. F.

Sed ſi hoc pacto Problema ſolvi nequit, per eliminationes variabilium (ope Æquationum datarum, & novarum Æquationum inde derivatarum per Prop. 1. ſi opus eſt) quære tot novas Æquationes quot ſunt variabiles x, v, y, &c. præter z, quarum una involvat tantùm x cum ſuis Incrementis (nempe præter z,) reliquæ involvant duas tantùm variabiles x & v, x & y, &c. (quarum una ſit ſemper x) cum ſuis Incrementis (in omnibus Æquationibus ſemper ſubintellecto z.) Per Æquationem involventem tantùm x cum ſuis Incrementis quære valorem ipſius x, expreſſum per dignitates ipſius z, ope Propoſitionis alicujus ſequentis. Deinde ope hujus Æquationis

elimi-

eliminetur x cum suis Incrementis ab Æquationibus involventibus tantum x & v, x & y, &c. cum suis incrementis; & per æquationes hoc modo resultantes quærantur valores ipsorum v, y, &c. expressi per dignitates ipsius z, eodem modo quo quærebatur valor ipsius x. Atque hoc pacto dabuntur omnes x, v, y, &c. expressi per dignitates ipsius z. Qui valores accommodabuntur ad conditiones Problematis ope coefficientium adhuc indeterminatorum. Et si horum valorum aliqui prodeunt in terminis numero finitis, vel in seriebus quæ ad expressiones finitas reduci possunt, ex hâc parte dabitur solutio verè Mathematica in terminis numero finitis. Sed ubi Series ad terminos finitos reduci nequit, solutio pro Mechanicâ est habenda, atq; seriei usus erit in inventione radicis quæsitæ x, vel v, vel y, &c. per approximationes.

SCHOLIUM.

Reductio æquationum propositarum ad æquationes integrales in hâc solutione plurimum pendet a solertiâ Analystæ in inventione incrementorum (per *Prop.* 1.) exercitati. Quare in hunc finem utile est quantitatum variis modis compositarum incrementa quærere, eaq; in tabulas referre, quæ deinde consuli possunt, quoties opus est alicujus incrementi integralem invenire. Hujus generis est sequens tabella.

Incrementa.	Integrales.
1. $a\underset{\cdot}{z} + b\underset{\cdot}{z}z + c\underset{\cdot}{z}z\acute{z} +$	$A + \frac{1}{1}az + \frac{1}{2}bz\grave{z} + \frac{1}{3}cz\grave{z}\ddot{z} +$
$d\underset{\cdot}{z}z\grave{z}\ddot{z} +$ &c.	$\frac{1}{4}dz\grave{z}\ddot{z}\dddot{z} +$ &c.
2. $\frac{a\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}} + \frac{b\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}z_{\prime\prime}} + \frac{c\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}z_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}} +$	$A - \frac{a}{1z} - \frac{b}{2zz_{\prime}} - \frac{c}{3zz_{\prime}z_{\prime\prime}} -$
$\frac{d\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}z_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}z_{\prime\prime\prime\prime}} +$ &c.	$\frac{d}{4zz_{\prime}z_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}} -$ &c.

Fluxiones.	Fluentes.
1. $\dot{z}z^{\pm n}$	$\frac{1}{\pm n + 1} z^{\pm n + 1} + A.$
2. $\overline{\vartheta\dot{z}x + \lambda\dot{x}z} \times z^{\vartheta - 1} x^{\lambda - 1}$	$A + z^{\vartheta} x^{\lambda}$
3. $\overline{\vartheta\dot{z}xv + \lambda\dot{x}zv + \mu\dot{v}zx} \times z^{\vartheta - 1} x^{\lambda - 1} \times v^{\mu - 1}$	$A + z^{\vartheta} x^{\lambda} v^{\mu}.$
4. $\overline{\vartheta\dot{z}xvy + \lambda\dot{x}zvy + \mu\dot{v}zxy + \pi\dot{y}zxv} \times z^{\vartheta - 1} x^{\lambda - 1} v^{\mu - 1} y^{\pi - 1}$	$A + z^{\vartheta} x^{\lambda} v^{\mu} y^{\pi}.$

Comparando expressiones propositas cum hujusmodi exemplis solvuntur quædam Problemata. Sit æquatio $\dddot{x}\dot{x}x - \ddot{x}^2 x - 2\dot{x}^2\ddot{x} = 0$. Comparando hanc æquationem cum fluxionis tertiæ factore $\vartheta\dot{z}xv + \lambda\dot{x}zv + \mu\dot{v}zx$, invenitur $\vartheta = 1$, $\lambda = -1$, $\mu = -2$, ipsis $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x in hâc æquatione subeuntibus vices ipsorum z, x, v, in fluxione istâ. Unde fit fluens $\ddot{x}\dot{x}^{-1} x^{-2}$ æqualis quantitati datæ, (quoniam est ipsius fluxio æqualis nihilo.) Sit itaq, a quantitas data, atq; erit $\ddot{x}\dot{x}^{-1} x^{-2} = a\dot{z}$ (nempe completis ordinibus fluxionum per dignitates fluxionis datæ $\dot{z}$.) Hinc fit $\ddot{x} = a\dot{z}\dot{x}x^2$; unde iterum regrediendo ad fluentes (ad exemplum fluxionis $\dot{z}z^{\pm n}$) fit $\dot{x} = \frac{a\dot{z}x^3}{3} + b\dot{z}$. Quo pacto jam revocatur æquatio fluxionalis ordinis tertii ad æquationem fluxionalem ordinis tantum primi.

Ad eundem modum potest æquatio $\ddot{x}^2 = x^3\dot{z}^4$, vel (pro $\dot{z}$ scripto 1) $\ddot{x}^2 = x^3$ revocari ad ordinem superiorem. Nam extrahendo radicem

radicem fit $\ddot{x} = x^{\frac{3}{2}}$. Duc æquationem in $\dot{x}$, atq; fit $\ddot{x}\dot{x} = \dot{x}x^{\frac{3}{2}}$; unde capiendo fluentes fit $\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + a$.

Sit alia æquatio $\ddot{x}^2 = \dot{x}x$: tum extractâ radice fit $\ddot{x} = \dot{x}^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, hoc est $\ddot{x}\dot{x}^{\frac{1}{2}} = \dot{x}x^{\frac{1}{2}}$, unde capiendo fluentes fit $\frac{2}{3}\dot{x}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + a$, vel si placet $\dot{x}^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + a$. Et hoc modo per multiplicationes, divisiones, & extractiones radicûm reducendo expressiones ad formas fluxionum cognitarum, vel inveniuntur ipsæ fluentes, vel revocantur æquationes ad fluxionum ordines superiores.

PROP. VII. THEOR. III.

Sint z & x quantitates duæ variabiles, quarum z uniformiter augetur per data incrementa $\underset{\cdot}{z}$, *& sit* $n\underset{\cdot}{z} = v$, $v - \underset{\cdot}{z} = \dot{v}$, $\dot{v} - \underset{\cdot}{z} = \ddot{v}$, *& sic porrò. Tum dico quod quo tempore z crescendo fit z + v, x item cresendo fiet*

$$x + \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\cdot\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3} + \&c.$$

DEMON-

DEMONSTRATIO.

x	$\underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\because}{x}$	$\underset{::}{x}$	&c.
$x+\underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$	$\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.	
$x+2\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+2\,\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}+2\,\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.		
$x+3\,\underset{\cdot}{x}+3\,\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+3\,\underset{\cdot\cdot}{x}+3\,\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.			
$x+4\,\underset{\cdot}{x}+6\,\underset{\cdot\cdot}{x}+4\,\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.				
&c.					

Valores successivi ipsius x per additionem continuam collecti sunt x, $x+\underset{\cdot}{x}$, $x+2\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$, $x+3\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$, &c. ut patet per operationem in tabula annexa expressam. Sed in his valoribus x coefficientes numerales terminorum x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. eodem modo formantur, ac coefficientes terminorum correspondentium in dignitate binomii. Et (per Theorema *Newtonianum*) si dignitatis index sit n, coefficicientes erunt $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, &c. Ergò quo tempore z crescendo fit $z + n\underset{\cdot}{z}$, hoc est $z + v$, fiet x æqualis seriei $x + \frac{n}{1}\underset{\cdot}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}\underset{\cdot\cdot}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} + \underset{\because}{x}$ &c.

Sed sunt $\frac{n}{1} = \left(\frac{n\underset{\cdot}{z}}{\underset{\cdot}{z}} =\right)\frac{v}{\underset{\cdot}{z}}$, $\frac{n-1}{2} = \left(\frac{n\underset{\cdot}{z} - \underset{\cdot}{z}}{2\underset{\cdot}{z}} =\right)\frac{v}{2\underset{\cdot}{z}}$, $\frac{n-2}{3} =$

(nz

$\left(\frac{n\underset{\cdot}{z} - 2\underset{\cdot}{z}}{3\underset{\cdot}{z}} = \right)\frac{\ddot v}{\underset{\cdot}{z}}$, &c. Proinde quo tempore z crescendo fit $z + v$, eodem tempore x crescendo fiet $x + \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot v}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\therefore}{x}\frac{v\dot v\ddot v}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3} +$ + &c.

COROLL. I.

Et ipsis $\underset{\cdot}{z}$, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\therefore}{x}$, &c. iisdem manentibus, ~~mutato signo ipsius v,~~ et mutatis signis incrementorum etiam quo tempore z decrescendo fit $z - v$, eodem tempore x decrescendo fiet $x - \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot v}{\text{[redacted]}}$ $1.2\underset{\cdot}{z}^2$ $- \underset{\therefore}{x}\frac{v\dot v\ddot v}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3}$ &c. vel juxta notationem nostram $x - \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\underset{\prime}{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} - \underset{\therefore}{x}\frac{v\underset{\prime}{v}\underset{\prime\prime}{v}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3}$ &c. ipsis $\dot v, \ddot v$, &c. conversis in $-\underset{\prime}{v}$, $-\underset{\prime\prime}{v}$, &c.

COROLL. II.

Si pro Incrementis evanescentibus scribantur fluxiones ipsis proportionales, factis jam omnibus $\ddot v, \dot v, v, \underset{\prime}{v}, \underset{\prime\prime}{v}$, &c. aequalibus quo tempore z uniformiter fluendo fit $z + v$ fiet x, $x + \dot x\frac{v}{1\dot z} + \ddot x\frac{v^2}{1.2\dot z^2} + \dddot x\frac{v^3}{1.2.3\dot z^3}$ &c. vel mutato signo ipsius v, quo tempore z decrescendo fit $z - v$, x decrescendo fiet $x - \dot x\frac{v}{1\dot z} + \ddot x\frac{v^2}{1.2\dot z^2} - \dddot x\frac{v^3}{1.2.3\dot z^3} +$ &c.

PROP. VIII. PROB. V.

Datâ Æquatione præter uniformiter crescentem z involvente quotvis incrementa alterius variabilis x; invenire valorem x ex dato z per seriem terminorum numero infinitam.

Per Propositionem primam quære æquationis propositæ incrementa omnia in infinitum. Tum si sit $\underset{n}{x}$ infimum incrementum ipsius x in æquatione propositâ per has æquationes dabuntur omnia incrementa $\underset{n}{x}$ & inferiora expressa per incrementa ipsa $\underset{n}{x}$ superiora. Sint a, & c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, $\underset{\therefore}{c}$ &c. certi quidam valores correspondentes ipsorum z & x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\therefore}{x}$, &c. atque per easdem æquationes dabuntur omnes termini $\underset{n}{c}$, $\underset{n+1}{c}$, & sequentes expressi per terminos præcedentes ipsum $\underset{n}{c}$. Unde si pro z scribatur $a + v$, dabitur x per æquationem $x = c + \underset{\cdot}{c}\dfrac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{c}\dfrac{v\grave{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\therefore}{c}\dfrac{v\grave{v}\grave{\grave{v}}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3} +$ &c. (per *Prop.* 7.) Ubi terminorum coefficientes c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c quorum numerus est n, dabuntur per totidem conditiones Problematis.

SCHOLIUM.

Ubi est x compositum aliquod ex dignitatibus integris affirmativis ipsius z, evanescentibus incrementis inferioribus, post certum numerum terminorum series abrumpetur & fiet finita. Sit æquatio $x\underset{\cdot}{z} - \underset{\cdot}{x} + 1 = 0$, & sit $\underset{\cdot}{z} = 1$. Tum capiendo incrementa, fiet $\underset{\cdot}{x}\underset{\cdot}{z} + \underset{\cdot\cdot}{x} = 0$.

Sed

Sed hoc fieri nequit nisi sit $\ddot{x} = 0$; aliàs enim determinaretur z per æquationem $z + 1 = 0$. Ergò si pro z scribatur $a + v$, & sint c & $\dot{c}$ ipsorum x & $\dot{x}$ valores quando $v = 0$, erit semper $x = c + \dot{c}v$, hoc est, (pro $\dot{c}$ scripto ipsius valore per æquationem propositam invento) $x = c + \frac{c-1}{a} v$, hoc est (pro v scripto ipsius valore $z - a$) $x = 1 + \frac{c-1}{a} z$.

In seriebus hoc modo prodeuntibus post aliquot terminos ex observatâ analogiâ plerumque possunt inveniri coefficientes sequentes absque ulteriori calculo. Et possunt nonnunquam series inventæ comparari cum aliis seriebus cognitis, quæ producuntur a cognitis expressionibus finitis: quare vice serierum substitutis istis expressionibus finitis, eo pacto dabuntur integrales in terminis numero finitis.

Sit æquatio fluxionalis $\ddot{x}z + n\ddot{x}x - \dot{x} - \dot{x}^2 = 0$, ubi pro $\dot{z}$ scribitur 1. Hinc fit $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + \dot{x}^2}{z + nx}$ vel (pro $z + nx$ scripto y) $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + \dot{x}^2}{y}$

Et per calculum continuatum invenietur $\dddot{x} = (\overline{2 - n} \times \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^3}{y^2} =)$ $\overline{2 - n}\, \frac{\dot{x}}{y} \ddot{x}$, $\overset{4}{x} = \overline{3 - 2n}\, \frac{\dot{x}}{y} \dddot{x}$, $\overset{5}{x} = \overline{4 - 3n}\, \frac{\dot{x}}{y} \overset{4}{x}$, & sic porrò. Quare

(pro $a + nc$ scripto p,) per hanc *Prop.* erit $x = c + \dot{c}v + \frac{\ddot{c}v^2}{2} + \frac{\overline{2 - n}\, \dot{c}\, \dddot{c} v^3}{1.\,2.\,3p} + \frac{\overline{2 - n}.\,\overline{3 - 2n}.\, \dot{c}\, \dot{c}^2 \dddot{c} v^4}{1.\,2.\,3.\,4p^2} +$ &c. hoc est $x = c + \dot{c}v +$

$$\frac{\ddot{c}p^2}{n\dot{c}^2} \times \overline{\frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \dot{c}^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2 - n}{3p} \dot{c}^3 v^3 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2 - n}{3p} \times \frac{3 - 2n}{4p} \dot{c}^4 v^4}$$

+ &c. Sed numeri n, 1, $2 - n$, $3 - 2n$, &c. producuntur per continuam subductionem numeri $n - 1$. Quare si sit $p = n - 1$, erit series

$$\frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \dot{c}^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{2 - n}{3p} \dot{c}^3 v^3 + \text{\&c.} = \overline{1 + \dot{c}v}\big|^{\frac{n}{n-1}} - 1 +$$

n

$\frac{n}{n-1}\dot{c}v$. Pone itaque $p = n - 1$, hoc est, fiat $a = n - 1 - nc$, atque dabitur x per æquationem finitam $x = c + \dot{c}v + \ddot{c}\,\overline{\frac{n-1}{n\dot{c}^2}}\Big|^2 \times \overline{\overline{1+\dot{c}v}\big|^{\frac{n}{n-1}} - 1 - \frac{n}{n-1}\dot{c}v}$; ubi est $\ddot{c} = \frac{\dot{c}+\dot{c}^2}{n-1}$, atque $v = z - n + 1 + nc$; atque incogniti c & $\dot{c}$ determinandi sunt per duas conditiones Problematis. Porro in hâc æquatione x & z subeunt vices ipsorum z & x in æquatione $\ddot{x}x + \dot{x}x + n\dot{x}z + \dot{x}\dot{z} = 0$, quam adduximus in *Lem.* 1. Eam verò in ordine ad inventionem hujus expressionis finitæ (absque isthac transformatione quidem frustra quæsitæ) transformavi per Propositionem tertiam. Cujus Propositionis usus quantus sit constat etiam ex hoc exemplo. Sed & fluente uniformiter z, ubi in æquatione propositâ involvuntur fluxiones secundæ, tertiæ, vel sequentes ipsius x, si per hanc Propositionem cupis invenire valorem ipsius z ex dato x, erit æquatio eodem modo transformanda.

Nonnunquam per alias transformationes inveniuntur expressiones finitæ. Sit æquatio $4x^3 - 4x^2 = \overline{1+z^2}\big|^2 \dot{x}^2$ (quam etiam adduximus in *Lem.* 1.) Pono $x = v^{\vartheta} y^{\lambda}$, deinde substituto hoc valore x, & valore fluxionis $\dot{x}$ inde resultante, quærendo æquationis formam simplicissimam determino indices ϑ & λ, & valorem unius v vel y. Hinc ergò fit $\dot{x} = \overline{\vartheta\dot{v}n + \lambda\dot{y}v} \times v^{\vartheta-1} y^{\lambda-1}$, atque (per substitutionem) $4v^{3\vartheta} y^{3\lambda} - 4v^{2\vartheta} y^{2\lambda} = \overline{1+z^2}\big|^2 \times \overline{\vartheta\dot{v}y + \lambda\dot{y}v}\big|^2 v^{2\vartheta-2} y^{2\lambda-2}$. Pono $v = 1 + z^2$, & æquatio fit simplicior $4v^{\vartheta} y^{\lambda+2} - 4y^2 = \overline{2\vartheta zy + \lambda\dot{y}v}\big|^2$. Pono $\lambda = -2$ & fit $v^{\vartheta} - y^2 = \overline{\vartheta zy - \dot{y}v}\big|^2$, hoc est $v^{\vartheta} = \overline{\vartheta^2 z^2 + 1}\,y^2 - 2\vartheta z\dot{v}y\dot{y} + \dot{v}^2\dot{y}^2$. Pono deniq; $\vartheta = 1$, atque fit $\vartheta z^2 + 1 = v$, quo pacto

pacto æquatio divisa per v fit $1 = y^2 - 2zy\dot{y} + v\dot{y}\dot{y}$. Unde capiendo fluxiones fit $o = 2y\dot{y} - 2y\dot{y} - 2z\dot{y}\dot{y} - 2zy\ddot{y} + \dot{v}\dot{y}\dot{y} + 2v\dot{y}\ddot{y}$, hoc est (pro $\dot{v}$ scripto ipsius valore $2z$) $- 2zy\ddot{y} + 2v\dot{y}\ddot{y} = o$. Hinc fit vel $\ddot{y} = o$, vel $- zy + v\dot{y} = o$. Si fiat $- zy + v\dot{y} = o$, invenietur $y^2 = v$, adeoq; $x = (vy^{-2} =)\ 1$; quæ est singularis quædam solutio Problematis. Sed si fiat $\ddot{y} = o$, pro ipsorum z, y, & $\dot{y}$ valoribus concurrentibus scriptis o, a, & $\dot{a}$, invenietur $\dot{a} = \sqrt{1 - aa}$, adeoque erit $y = a + \sqrt{1 - aa}\,z$ (per hanc Propositionem,) & inde $x = (v^{\theta}y^{\lambda} =)$

$$\frac{1 + z^2}{\overline{a + \sqrt{1-a^2}z +}|^2}.$$

Quoties fieri potest ipsius z valor datus æqualis nihilo, nec eo pacto termini seriei redduntur infiniti, series prodibit in formâ simpliciori ascendens per dignitates ipsius z. Et in hoc casu potest assumi series in terminis generalibus exprimens valorem x; in quâ coefficientes postea determinentur per comparationem terminorum, ad normam sequentis exempli.

Sit æquatio $\ddot{x} - \dot{x}z - 2x = o$. Pone $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$ Tum capiendo fluxiones fit $\dot{x} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \&c.$ atque $\ddot{x} = 2C + 6Dz + 12Ez^2 + \&c.$ Quibus valoribus ipsorum x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ in æquatione scriptis, & terminis dispositis secundùm dignitates ipsius z fit

$$\left.\begin{array}{llll} 2C + 6Dz + 12Ez^2 + \&c. \\ -2A - 2B - 2C & \&c. \\ \quad - B - 2C & \&c. \end{array}\right\} = o.$$

In hâc æquatione (ne fiat z quantitas determinata per æquationem affectam alicujus ordinis Analytici, quod in hoc casu est absurdum, quoniam ex hypothesi eſt z quantitas variabilis, & ſemper ad libitum ſumenda,) debent termini omnes evaneſcere per ſe, per valores coefficientium A, B, C, &c. Erit ergò per terminum primum $C = A$, per ſecundum $D = \frac{1}{2} B$, per tertium $E = \frac{1}{3} C = \frac{1}{3} A$, & ſic porrò; unde fit $x = A + Bz + Az^2 + \frac{1}{3} Bz^3 + \frac{1}{4} Az^4 +$ &c.

Ubi hoc modo procedere velis per aſſumptionem ſerierum in formis generalibus, ſæpè difficile eſt iſtas formas invenire; præſertim ſi cupis coefficientes quot opus eſt indeterminatos eſſe relictos, ut conſulatur quas indicavi mei Prop 4 & 5 conditionibus Problematis. Series quaſdam particulares quærit *Newtonus* per extractiones radicum ab æquatiobus affectis, & methodum docet, concinnam ſanè & elegantem, inveniendi formas hujuſmodi ſerierum, per diſpoſitionem terminorum in parallelogrammis. Quod Artificium (factâ levi mutatione) in ſequenti propoſitione explicabimus.

PROP. IX. PROB. VI.

Datâ æquatione fluxionali duas tantùm Fluentes z & x, & earum Fluxiones involvente, quarum z uniformiter fluit per Fluxiones 1; invenire formas Serierum aſcendentium per dignitates ipſius z, per quas exprimi poſſit valor ipſius x.

Seriei quæſitæ forma generalis eſt $Az^{\vartheta} + Bz^{\vartheta+n} + Cz^{\vartheta+2n} +$ &c. & in dato caſu ſpeciali determinandi ſunt indices dignitatum ϑ & n. Qui tales eſſe debent, ut, converſis omnibus terminis æquationis propoſitæ in ſeries, in iis ſubſtituendo valores ipſius x & fluxionum ſuarum per hanc ſeriem, & per ejus fluxiones expreſſos, poſſint termini omnium ſerierum hoc modo provenientium ita inter se diſponi, ut, per comparationem terminorum in quibus ſunt eædem dignitates ipſius z queant determinari coefficientes A, B, C, D, &c.

vel

vel omnes, vel quot fieri poteſt. Ad hoc duo requiruntur. Primùm, ut indices dignitatum z, in ſeriebus ex terminis æquationis propoſitæ per ſubſtitutionem provenientibus, omnes cadant in eandem ſeriem arithmeticè proportionalium; alias enim ſemper eſſent termini ſolitarii, per quos vel nihil determinaretur, vel fierent omnes coefficientes æquales nihilo. Secundò etiam requiritur, ut ſerierum hoc modo provenientium ad minimum duarum terminorum primorum indices inter ſe æquentur, ut determinetur coefficiens primus A: ne per terminum ſolitarium in initio æquationis ad comparationem terminorum inſtituendam ordinatæ fiat coefficiens A, vel fortè quantitas aliqua data in æquatione propoſitâ, æqualis nihilo; quo pacto perturbetur ordo ſeriei inveniendæ.

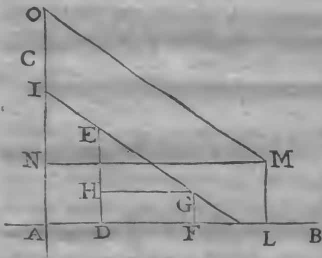
His præmiſſis, ſi terminus aliquis æquationis propoſitæ ſepoſito coefficiente dato ſit $z^{\mu}\,\dot{x}^{\alpha}\,\ddot{x}^{\beta}\,\dddot{x}^{\gamma}\,\ddddot{x}^{\delta}$ &c. terminus primus ſeriei ab hoc termino provenientis, (ſepoſito etiam coefficiente) erit

$$z^{\mu+\overline{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.}\times\vartheta-\beta-2\gamma-3\delta-\&c.}$$

; & ſi pro indice hujus termini ſcribatur π, ſeries illa (ſepoſitis coefficientibus) hanc habebit formam $\ldots z^{\pi}\ldots z^{\pi+n}\ldots z^{\pi+2n}\ldots z^{\pi+3n}\ldots$ &c. ita ut omnes ſeries ex terminis æquationis propoſitæ provenientes aſcendant per ipſius z dignitatem n. Hoc facile intelligitur paululum attendendo ad formationes fluxionum ſeriei $Az^{\vartheta}+Bz^{\vartheta+n}+Cz^{\vartheta+2n}+$ &c. & ad geneſes ſerierum ex terminis æquationis propoſitæ per multiplicationes hujuſmodi fluxionum in invicem. Ergò per jam dicta, debent omnes π cadere in eandem ſeriem arithmeticè proportionalium, quorum differentia eſt n, & ad minimum duo π in principio æquationis transformatæ debent eſſe inter ſe æquales. Qui vel omnium minimi erunt ſi ſit n affirmativus, vel omnium maximi ſi ſit n negativus. Ergò percurrendo omnes terminos æquationis propoſitæ ex ſingulis colligatur numerus π vel $\mu+\overline{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

$+$ &c.

$\overline{\mp \&c.} \times \vartheta - \beta - 2\gamma - 3\delta - \&c.$ vel (pro $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$ scripto y, & pro $\mu - \beta - 2\gamma - 3\delta - \&c.$ scripto v,) $y\vartheta + v$. Sint $y\vartheta + v$, & $\dot{y}\vartheta + \dot{v}$ duo ex hujusmodi numeris. Tum si hi numeri tales sint, ut facti inter se æquales, & inde determinato ϑ, sint omnium numerorum $y\vartheta + v$ per istum valorem ϑ provenientium vel maximi, vel minini, rectè determinabitur ϑ. Hoc autem fit sequenti artificio.



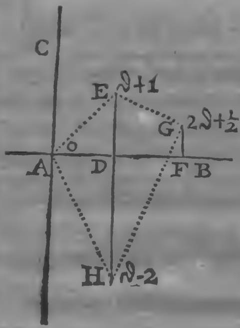
Duc rectas infinitas AB, AC, & (sumptâ aliquâ lineâ pro unitate) in AB (ad dextram si sit y affirmativus, sed ad sinistram si sit y negativus) sume AD $= y$, & ductâ DE ipsi AC parallelâ, in eâ (sursum si sit v affirmativus, at deorsum si contrâ) sume DE $= v$, & colloca numerum $y\vartheta + v$ in puncto E. Omnibus numeris $y\vartheta + v$ in punctis hoc modo dispositis, sint eorum exteriora duo E & G, ita ut puncta reliqua omnia cadant ad easdem partes rectæ EG. Tum numeri in punctis E & G inter se facti æquales dabunt valorem indicis ϑ. Duc enim GF parallelam ipsi CA & occurrentem AB in F, & sit M aliud punctum in quo collocatur alius numerus π, & ducatur ML parallela ipsi CA & occurrens AB in L, atq; occurrent GE ipsi AC in I, & ducatur ei parallela MO occurrens AC in O, atq; ducantur GH, MN ipsi AB paralleæ & occurrentes DE & AC in H & N. Tum numeri π collocati in punctis E,G, & M erunt AD $\times \vartheta +$ DE, AF $\times \vartheta +$ FG, & AL $\times \vartheta +$ LM (per constructionem). Quare si numeri in E & G fiant æquales erit $\vartheta = \frac{DE - FG}{AF - AD}$, hoc est $\vartheta = \frac{HE}{HG}$, vel (ob similia triangula EHG, ONM) $\frac{NO}{NM}$.

Unde

Unde jam numerus $AL \times \vartheta + LM$ in puncto M fit $AL \times \frac{ON}{NM} +$ LM, hoc est AO; atq; ad eundem modum numeri æquales in E & G fiunt AI. Unde si puncta E & G sint omnium exteriora, adeo ut cadat punctum I vel infra vel supra omnia puncta O, erit AI, hoc est numerus π in E, vel in G, minor, vel major quolibet alio numero AO in puncto quovis alio M. Unde per positionem puncti I respectu punctorum O, determinatur signum ipsius ν; quippe qui affirmativus est ubi I cadit infra O, & negativus si contra. Et hinc facile constat esse ν maximum divisorem communem ipsius AI & omnium AO; alias enim non caderent omnes π in eandem seriem arithmetice proportionalium, ut per jam dicta fieri debet.

Ergo numeris omnibus π in plano hoc modo dispositis, si applicetur regula ad puncta duo exteriora E & G, dabitur index ϑ, atq; signum indicis ν. Deinde invenietur ipse ν sumendo maximum divisorem communem omnium numerorem π provenientium per valorem ϑ jam inventum. Unde dabitur forma seriei quæsitæ. *Q. E. I.* Ipsius autem ϑ signum est affirmativum ubi GE subtendit angulum CAB, atq, negativum ubi subtendit ejus complimentum ad duos rectos.

Sit hujus rei exemplum in æquatione $1 + zx - z^{\frac{3}{2}} x\dot{x} - \dot{x} = 0$. Percurrendo terminos hujus æquationis, in primo 1 sunt $\mu = 0 = \alpha = \beta = \gamma =$ &c. Unde primus numerus π (vel $y\vartheta + v$) erit 0. In secundo termino zx sunt $\mu = 1 = \alpha$, $\beta = 0 = \gamma = \delta =$ &c unde secundus numerus π fit $\vartheta + 1$. In tertio termino $z^{\frac{3}{2}} x\dot{x}$ sunt $\mu = \frac{3}{2}$, $\alpha = 1 = \beta$, $\gamma = 0 = \delta =$ &c. unde tertius π fit $2\vartheta + \frac{1}{2}$. Denique in ultimo termino $\dot{x}$ sunt $\mu = 0 = \alpha = \beta$, $\gamma = 1$, $\delta = 0 =$ &c. unde ultimus π fit $\vartheta - 2$.



Ductis itaque AB & AC, erit punctum A locus numeri π primi, vel o. Sume abſciſſam AD $= 1$, & ordinatam ipſi AC parallelam DE $= 1$, atq; erit E locus ſecundi π, vel $\vartheta + 1$. Sume abſciſſam AF $= 2$, & ordinatam FG $= \frac{1}{2}$, atque erit G locus tertii π, vel $2\vartheta + \frac{1}{2}$. Sume denique AD $= 1$, & ordinatam DH $= -2$, atque erit H locus numeri $\vartheta - 2$.

Jam ductis rectis per puncta omnia exteriora, includentur omnia puncta trapezio AHGEA. Æquatis inter ſe numeris o & $\vartheta - 2$ in extremitatibus lateris AH, fiet $\vartheta = 2$, & omnes numeri π fient, o, o ($= \vartheta - 2 = 0$,) 3 ($= \vartheta + 1$,) & $\frac{9}{2}$ ($= 2\vartheta + \frac{1}{2}$,) quorum omnium minimi ſunt duo æquales o, & diviſor maximus communis eſt $\frac{3}{2}$; quare in hoc caſu eſt $n = \frac{3}{2}$.

Pro numeris æqualibus ſumptis $\vartheta - 2$ & $2\vartheta + \frac{1}{2}$ in extremitatibus lateris HG, fit $\vartheta = -\frac{5}{2}$, & omnes numeri π fiunt $-\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{3}{2}$, o; quorum minimi ſunt duo æquales $-\frac{9}{2}$, & maximus diviſor communis eſt $\frac{3}{2}$: quare in hoc caſu eſt $n = \frac{3}{2}$.

Si fiant $2\vartheta + \frac{1}{2}$ & $\vartheta - 1$ inter ſe æquales erit $\vartheta = \frac{1}{2}$, & numeri omnes erunt $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, o, $-\frac{3}{2}$, quorum maximi ſunt duo æquales $\frac{3}{2}$, & diviſor communis eſt $\frac{3}{2}$: quare in hoc caſu eſt $n = -\frac{3}{2}$.

Denique ſi fiat $\vartheta + 1 = 0$, erit $\vartheta = -1$, & omnes numeri erunt o, o, $-\frac{3}{2}$, -3, quorum maximi ſunt duo o, & diviſor maximus communis eſt $\frac{3}{2}$: quare in hoc caſu eſt $n = -\frac{3}{2}$.

Poteſt

Poteſt ergò fieri

$$\text{vel } 1. \quad x = Az^{2} + Bz^{\frac{7}{2}} + Cz^{5} + \&c.$$

$$\text{vel } 2. \quad x = Az^{-\frac{5}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{\frac{1}{2}} + \&c.$$

$$\text{vel } 3. \quad x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

$$\text{vel } 4. \quad x = Az^{-1} + Bz^{-\frac{5}{2}} + Cz^{-4} + \&c.$$

In caſu tertio Analyſis ſe habet ut infra exhibetur.

Æqu.

Æqu. propoſita.		$1 + zx - z^{\frac{3}{2}}\dot{x}x - \ddot{x} = 0$
Æqu. aſſumpta.		$x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{-\frac{5}{2}} + \&c.$
Fluxiones.		$\dot{x} = \frac{1}{2}Az^{-\frac{1}{2}} - Bz^{-2} - \frac{5}{2}Cz^{-\frac{7}{2}} - \&c.$ $\ddot{x} = -\frac{1}{4}Az^{-\frac{3}{2}} + 2Bz^{-3} + \frac{35}{4}Cz^{-\frac{9}{2}} + \&c.$
Æquatio transformata.	zx	$Az^{\frac{3}{2}} + B + Cz^{-\frac{3}{2}} + \&c.$
	$-z^{\frac{3}{2}}\dot{x}x$	$-\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}AB + 2AC + B^2$ &c.
	$1 - \ddot{x}$	$+ 1 + \frac{1}{4}A - \&c.$ $\quad = 0.$
Inventio Coefficientium	1.	$A - \frac{1}{2}A^2 = 0.$ Unde $A = 2.$ vel $A = 0.$
	2.	$B + \frac{1}{2}AB + 1 = 0.$ $B = -\frac{1}{2}.$ $B = -1.$
	3.	$C + 2AC + B^2 + \frac{1}{4}A = 0.$ $C = -\frac{3}{20}.$ $C = -1.$
	&c.	&c. &c. &c.
Valores Radicis x.	1.	$x = 2z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{20}z^{-\frac{5}{2}} - \&c.$
	2.	$x = \quad - z^{-1} - z^{-\frac{5}{2}} - \&c.$

In hâc æquatione, ut vides, duæ ſunt ſeries exprimentes valorem ipſius x, prodeuntes per duos valores ipſius A in æquatione $A - \frac{1}{2}A^2 = 0$, & harum ſerierum ſecunda eſt ejuſdem formæ ac ſeries in caſu ultimo; quare per unam hanc Analyſin invenitur utraque ſeries, tam caſûs quarti, quam caſus ſecundi. Quinetiam per Analyſin inſtitutam in caſu ſecundo eodem modo ſimul invenies ſeriem in caſu primo. Unde per duas tantùm Analyſes ſeries omnes inveniuntur. Sed hoc in eo caſu tantùm fit ubi eſt n idem in duabus ſeriebus, atq; ubi una radix A in æquatione primâ inventâ per comparationem terminorum eſt o. Poſſunt autem plures eſſe radices A in iſtâ æquatione, pro genio cujuſvis æquationis propoſitæ; & quot ſunt radices A, tot dabuntur ſeries per ſingulas Analyſes.

In hâc Analyſi ſecundò obſervandum eſt, quod omnes omninò coefficientes A, B, C, &c. determinantur per comparationem terminorum. Quare ſeries hoc modo inventæ ſunt omnes particulares, neque accommodari poſſunt ad conditiones Problematis, ob defectum coefficientium indeterminatorum.

SCHOLIUM.

Nonnunquam ubi index θ eſt numerus integer affirmativus, evaneſcunt termini primi in ſeriebus exprimentibus fluxiones ipſius x: nam producuntur coefficientes iſtorum terminorum primorum per continuam multiplicationem ipſius A in numeros θ, $\theta - 1$, $\theta - 2$, &c. In hoc caſu ſæpe fit ut terminus evaneſcat, qui debeat eſſe unus ex terminis in principio æquationis transformatæ, quo pacto ſeries iſta aliquando fit impoſſibilis. Sed ſi evaneſcant termini in geneſi fluxionum, & tamen ſuperſint termini duo in principio æquationis transformatæ, ſeries adhuc dabitur; quæ etiam hoc erit cæteris præſtantior, quod in eâ erunt coefficientes aliquot indeterminati, per quas accommodari poteſt ſeries ad aliquot conditiones Problematis. Quinetiam per ſimilem evaneſcentiam terminorum in productione fluxionum ſunt nonnunquam aliæ ſeries radicem exprimentes, quæ per hanc propoſitionem minimè inveniuntur.

Quoniam de æquationum radicibus particularibus jam loquimur, libet etiam hoc unum obiter obſervare; nempe quod ſi v ſit quantitas ex datis & variabilibus quovis modo compoſita, & poſſit æquatio ad talem formam reduci, ut omnis terminus involvat vel ipſum v, vel ejus incrementum aliquod, erit æquatio $v = 0$ particularis ſolutio Problematis. Si in æquatione hoc modo transformatá involvatur ipſum v, æquatio $v = 0$ nullum continebit coefficientem indeterminatum, adeoq; ſolutio hæc erit maxime particularis; præſertim ſi v integrales tantum involvat. Si æquationem transformatam non ingreditur v, ſed $\dot{v}$, æquatio $v = 0$ continebit unum coefficientem indeterminatum. Si æquatio eadem non continet nec v, neq; $\dot{v}$, ſed $\ddot{v}$, æquatio $v = 0$ continebit duos coefficientes indeterminatos: atq; in genere quo plures terminorum ſuperiorum v, $\dot{v}$, $\ddot{v}$, &c. deficiunt in æquatione transformatâ eo generalior erit ſolutio Problematis per æquationem $v = 0$.

Ad hæc ubi v integrales tantùm involvit poteſt commode inveniri Problematis ſolutio generaliſſima, per v & incrementa ſua exterminando cæteras variabiles, & deinde quærendo radicem v per methodum aliquam jam traditam. Sic in æquatione $x - \frac{1}{2} - \dot{x}z = 0$, pro $x - \frac{1}{2}$ ſcripto v fit $v - \dot{v}z = 0$, hoc eſt $\frac{v\dot{z} - \dot{v}z}{v^2} = 0$. Sed ipſius $\frac{v\dot{z} - \dot{v}z}{v^2}$ fluens eſt $\frac{z}{v}$: quare pro quantitate quavis invariabili ſcripto A erit $\frac{z}{v} = A$, hoc eſt $\frac{z}{x - \frac{1}{2}} = A$.

LEM-

LEMMA II.

Si datur x ex dato z per æquationem quamvis analyticam certi cujusvis numeri dimensionum; etiam dabitur ipsius x incrementum quodvis $\underset{n}{x}$ ex dato z per æquationem ejusdem numeri dimensionm.

Nam quot sunt dimensiones ipsius x in æquatione propositâ, tot sunt ejusdem radices (quippe etiam impossibiles ad numerando.) Sed singulæ radices x sua habent incrementa. Quare tot sunt radices incrementi cujusvis $\underset{n}{x}$ quot sunt radices ipsius integralis x; adeoq; utrumq; dabitur ex dato z per æquationes ejusdem numeri dimensionum. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc propositâ æquaitone definiente relationem singularis alicujus incrementi $\underset{n}{x}$ ad cognitam variabilem z, si dari potest integralis x ex dato z per æquationem terminorum numero finitam, dabitur per æquationem in quâ x ascendit ad tot dimensiones, atq; ascendit $\underset{n}{x}$ in æquatione propositâ.

PROP. X. PROB. VII.

Datâ æquatione unius dimensionis definiente valorem cujusvis incrementi singularis $\underset{n}{x}$; invenire valorem ipsius integralis x in terminis numero finitis, si fieri potest.

Si

Si dari poteſt relatio x ad quantitates cognitas in terminis numero finitis, dabitur per æquationem unius dimenſionis (per *Cor. Lem.* 2.) Solutio itaque quærenda eſt tentando an quantitas, cui ſit $\underset{n}{x}$ æqualis, quo pacto reduci poſſit ad formam incrementi alicujus cogniti ejuſdem ordinis. Quod ſi ſit, dabitur radix x in terminis numero finitis, faciendo eam æqualem integrali iſtius expreſſionis. Sed ſi hoc fieri nequit res deſperanda erit.

In fluxionibus quoties dari poſſunt fluentes in terminis numero finitis invenientur per Quadraturam Curvarum *Newtonianam*. Et nonnunquam commodè inveniuntur hujuſmodi expreſſiones per Propoſitiones duas ſequentes.

PROP. XI. THEOR. IV.

Ipſius $\dot{r}s$ *fluens exprimi poteſt per alterutram ex ſeriebus* $\left|\overline{\dot{r}s}\right| = rs - \overset{\prime}{r}\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\ddot{s} - \overset{\prime\prime\prime}{r}\dddot{s} + \&c.$ *vel* $\left|\overline{\dot{r}s}\right| = \dot{r}\overset{\prime}{s} - \ddot{r}\overset{\prime\prime}{s} + \dddot{r}\overset{\prime\prime\prime}{s} - \&c.$

Theorema inveſtigatur ad ſequentem modum. Sit fluens quæſita $rs + p$, hoc eſt, ſit $\left|\overline{\dot{r}s}\right| = rs + p$. Tum capiendo fluxiones erit $\dot{r}s = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$, hoc eſt $\dot{p} = -r\dot{s}$; adeoque $p = -\left|\overline{r\dot{s}}\right|$, indeque $\left|\overline{\dot{r}s}\right| = rs - \left|\overline{r\dot{s}}\right|$. Itaque ſecundo fiat $\left|\overline{r\dot{s}}\right| = \dot{r}\dot{s} + q$; & capiendo fluxiones erit $r\dot{s} = r\dot{s} + \dot{r}\ddot{s} + \dot{q}$, hoc eſt $q =$

$\dot{q} = -\overset{\prime}{r}\ddot{s}$, atque $q = -\left|\overset{\prime}{r}\ddot{s}\right|$, adeoque $\left|r\dot{s}\right| = rs - \overset{\prime}{r}\dot{s} + \left|\overset{\prime}{r}\ddot{s}\right|$.

Et per operationes repetitas eodem modo invenitur $\left|r\dot{s}\right| = rs - \overset{\prime}{r}\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\ddot{s} - \left|\overset{\prime\prime}{r}\dddot{s}\right| = rs - \overset{\prime}{r}\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\ddot{s} - \overset{\prime\prime\prime}{r}\dddot{s} + \left|\overset{\prime\prime\prime}{r}\ddddot{s}\right| =$ &c.

Ad eundem modum ſumendo fluentes ipſius s & fluxiones ipſius r inveſtigatur ſeries altera.

Quando hoc Theorema eſt applicandum ad caſum particularem, eligenda eſt fluxio aliqua quae dicetur $\dot{w}$, & in computandis fluentibus $\overset{\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime\prime}{r}$, &c. vel $\overset{\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. cum primùm comparuerit fluens aliqua, ea ducenda erit in $\dot{w}$, & producti fluens ſumenda erit pro proximâ fluente quæſitâ. Item in computandis fluxionibus $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c. vel $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. quoties colligitur fluxio aliqua, erit ea applicanda ad $\dot{w}$, & quotientis fluxio ſimiliter applicata ad $\dot{w}$ ſumenda erit pro fluxione proxime quæſitâ. Hæc autem fluxio $\dot{w}$ ita ſumenda eſt ut termini ſint quam fieri poteſt ſimpliciſſimi.

Poteſt etiam ſeries per hoc Theorema inventa dupliciter accommodari ad conditionem Problematis, hoc eſt, ad datum unum valorem fluentis quæſitæ reſpondentem dato valori variabilis cognitæ. Hoc fit primo ſumendo omnes fluentes r, $\overset{\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, &c. vel $\overset{\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. purè, abſque ullâ correctione per additionem invariabilium, & deinde ſeriei inventæ addendo invariabilem per conditionem iſtam poſtea determinandam. Idem fit ſecundò fluentes omnes, cum primum prodierint, ita corrigendo per additiones invariabi-

Eum, ut omnes simul evanescant, (adeoque & series tota evanescat,) quando variabilis data est certi alicujus valoris.

Adhæc quando terminus aliquis $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. æqualis est nihilo, series prima abrumpitur, & fluentem dat in terminis numero finitis. Atque idem fit in serie alterâ, ubi evanescit terminus aliquis $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c.

EXEMP. I.

Sit $x\dot{x} = -z\dot{z}$, & propositum sit invenire fluentem ipsius $z\dot{x}$. In hoc casu si pro $\dot{r}$ sumatur $\dot{z}$, & pro s sumatur x, commodissimè fiet $\dot{w} = z\dot{z}$ $(= -x\dot{x})$. Et hoc pacto sunt $r = z$, $\overset{\prime}{r} = \left(\left|\overline{\dot{w} r}\right| = \right)\frac{z^3}{3}$, $\overset{\prime\prime}{r} = \left(\left|\overline{\dot{w} \overset{\prime}{r}}\right| = \right)\frac{z^5}{5.3}$, $\overset{\prime\prime\prime}{r} = \left(\left|\overline{\dot{w} \overset{\prime\prime}{r}}\right| = \right)\frac{z^7}{7.5.3.}$, & sic porrò; Item $\dot{r} = \left(\frac{\dot{z}}{\dot{w}} = \right)\frac{1}{z}$, $\ddot{r} = \left(-\frac{\dot{r}}{\dot{w}} = \right)\frac{-1}{z^3}$, $\dddot{r} = \left(-\frac{\ddot{r}}{\dot{w}} = \right)\frac{3}{z^5}$, & sic porrò. Sunt etiam $s = x$, $\dot{s} = \left(-\frac{\dot{s}}{\dot{w}} = \right)\frac{-1}{x}$, $\ddot{s} = \left(\frac{\dot{s}}{\dot{w}} = \right)\frac{-1}{x^3}$, $\dddot{s} = \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{w}} = \right)\frac{-3}{x^5}$, & sic porrò; item $\overset{\prime}{s} = \left(\left|\overline{\dot{w} s}\right| = \right)\frac{-x^3}{3}$, $\overset{\prime\prime}{s} = \left(\left|\overline{\dot{w} \overset{\prime}{s}}\right| = \right)\frac{x^3}{5.3}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s} = \left(\left|\overline{\dot{w} \overset{\prime\prime}{s}}\right| = \right)\frac{-x^7}{7.5.3}$, & sic porrò. Unde per seriem priorem $rs - \overset{\prime}{r}\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\ddot{s} - \overset{\prime\prime\prime}{r}\dddot{s} +$ &c. fit $\left|\overline{\dot{z} x}\right| = zx + \frac{z^3}{3x} - \frac{z^5}{5.3x^3} + \frac{z^7}{7.5x^5} -$ &c. Et per seriem alteram $\dot{r}\overset{\prime}{s} - \ddot{r}\overset{\prime\prime}{s} + \dddot{r}\overset{\prime\prime\prime}{s} -$ &c, fit $\left|\overline{\dot{z} x}\right| = \frac{-x^3}{3z} + \frac{x^5}{5.3z^3} - \frac{x^7}{7.5z^5}$ + &c.

In

In his feriebus fluentes $r, \acute{r}, \ddot{r}$, &c. item $\acute{s}, \ddot{s}, \overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. fumuntur pure; quare feries accommodandæ funt ad conditionem Problematis per additionem quantitatum invariabilium. Porro per harum ferierum primam exhibetur area circularis adjacens finui x & cofinui z, & per feriem alteram exhibetur ejufdem areæ complimentum ad quadrantem cum figno negativo: Quod ita fit quoniam area illa adjacet abfciffæ z ultra ordinatam productæ.

EXEMP. II.

Sit $x = a + bz^{n}$, & invenienda fit fluens ipfius $\dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1}$. In hoc cafu fi fiat $\dot{r} = \dot{z}z^{\theta}$, & $s = x^{\lambda-1}$ commodiffime fit $\dot{w} = \dot{x} = n b \dot{z} z^{n-1}$. Unde fumendo fluentes pure, ad inveniendam feriem priorem erit

$$r = \frac{z^{\theta}}{\theta}.$$

$$\acute{r} = \left(\overline{\dot{w}r} =\right) \frac{nbz^{\theta+n}}{\theta+n.\theta} = \frac{nbz^{n}}{\theta+n} r.$$

$$\ddot{r} = \left(\overline{\dot{w}\acute{r}} =\right) \frac{n^{2}b^{2}z^{\theta+2n}}{\theta+2n.\theta+n.\theta} = \frac{nbz^{n}}{\theta+2n} \acute{r}.$$

$$\overset{\prime\prime\prime}{r} = \left(\overline{\dot{w}\ddot{r}} =\right) \frac{n^{3}b^{3}z^{\theta+3n}}{\theta+3n.\theta+2n.\theta+n.\theta} = \frac{nbz^{n}}{\theta+3n} \ddot{r}.$$

& fic porrò.

Item

Item $\quad s = x^{\lambda-1}$

$$\dot{s} = \left(-\frac{s}{\dot{w}}- = \right)\overline{\lambda-1}\,x^{\lambda-2} = \frac{\lambda-1}{x}\,s.$$

$$\ddot{s} = \left(-\frac{\dot{s}}{\dot{w}}- = \right)\overline{\lambda-2}\cdot\overline{\lambda-1}\,x^{\lambda-3} = \frac{\lambda-2}{x}\,\dot{s}.$$

$$\dddot{s} = \left(-\frac{\ddot{s}}{\dot{w}}- = \right)\overline{\lambda-3}\cdot\overline{\lambda-2}\cdot\overline{\lambda-1}\,x^{\lambda-4} = \frac{\lambda-3}{x}\,\ddot{s}.$$

& ſic porrò,

Unde (pro integris terminis cum ſuis ſignis ſcribendo A, B, C, &c.) fit

$$\boxed{\dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1}} = \frac{z^{\theta}x^{\lambda-1}}{\theta} + \frac{-\lambda n+n}{\theta+n}\cdot\frac{bz^{n}}{x}A + \frac{-\lambda n+2n}{\theta+2n}\cdot\frac{bz^{n}}{x}B +$$

$$\frac{-\lambda n+3n}{\theta+3n}\cdot\frac{bz^{n}}{x}C + \&c.$$

Et ad inveniendam ſeriem alteram fit

$$\dot{r} = \left(\frac{\dot{z}z^{\theta-1}}{\dot{w}} = \right)\frac{z^{\theta-n}}{nb}.$$

$$\ddot{r} = \left(-\frac{\dot{r}}{\dot{w}}- = \right)\frac{\overline{\theta-n}\,z^{\theta-2n}}{n^2b^2} = \frac{\theta-n}{nbz^{n}}\,\dot{r}$$

$$\dddot{r} = \left(-\frac{\ddot{r}}{\dot{w}}- = \right)\frac{\overline{\theta-2n}.\overline{\theta-n}.\,z^{\theta-3n}}{n^3b^3} = \frac{\theta-2n}{nbz^{n}}\,\ddot{r}.$$

& ſic porro.

Item

Item $\overset{\prime}{s} = \left(\boxed{\dot{w}\,s} =\right) \dfrac{x^{\lambda}}{\lambda}$

$\overset{\prime\prime}{s} = \left(\boxed{\dot{w}\,\overset{\prime}{s}} =\right) \dfrac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1.\lambda} = \dfrac{x}{\lambda+1}\overset{\prime}{s}$

$\overset{\prime\prime\prime}{s} = \left(\boxed{\dot{w}\,\overset{\prime\prime}{s}} =\right) \dfrac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2.\lambda+1.\lambda} = \dfrac{x}{\lambda+2}\overset{\prime\prime}{s}$

& ſic porro.

Unde (pro terminis integris cum ſuis ſignis ſcriptis A, B, C, &c.) fit

$$\boxed{\dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1}} = \frac{z^{\theta-n}x^{\lambda}}{\lambda nb} + \frac{-\theta+n}{\lambda n+n}\cdot\frac{x}{bz^{n}}A + \frac{-\theta+2n}{\lambda n+2n}\cdot\frac{x}{bz^{n}}B + \frac{-\theta+3n}{\lambda n+3n}\cdot\frac{x}{bz^{n}}C + \&c.$$

In his ſeriebus per terminos jam appoſitos ſatis conſtat ratio formandi reliquos. Cæterum quando eſt λ numerus integer affirmativus, ſeries prima tandem abrumpitur, & fluentem exhibet in terminis numero finitis. Quod idem fit in ſerie alterâ, ubi eſt θ multiplex integer affirmativus ipſius n.

EXEMP. III.

Propoſitâ eadem fluxione $\dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1}$, ſit ſeries invenienda, quæ æqualis ſit nihilo quando $z = c$; idque ſit faciendum in ſerie aſcendente per dignitates ipſius x, & deſcendente per dignitates z. Hinc ubi eſt $z = c$, erit $x = a + bc^{n}$. Pro $a + bc^{n}$ ſcribe d, atque erit d valor ipſius x quando ſeries tota debet evaneſcere. Itaque facto $\dot{r} = \dot{z}z^{\theta-1}$, $s = x^{\lambda-1}$, & pro $\dot{w}$ ſumpto $\dot{x} = nb\dot{z}z^{n-1}$, exiſtentibus

r,

$\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c. iisdem ac in exemplo præcedenti, invenientur fluentes $\acute{s}$, s'', s''', &c. modo sequenti.

Est $\acute{s}$ fluens ipsius $\dot{w}s$, h. e. ipsius $\dot{x}x^{\lambda-1}$. Hujus fluens pura est $\frac{x^{\lambda}}{\lambda}$, quare ut evanescat $\acute{s}$ ubi est $x = d$, hinc dempto $\frac{d^{\lambda}}{\lambda}$ fit $\acute{s} = \frac{x^{\lambda}}{\lambda} - \frac{d^{\lambda}}{\lambda}$. Et per similes correctiones fit

$$\acute{s} = \frac{x^{\lambda}}{\lambda} - \frac{d^{\lambda}}{\lambda}$$

$$s'' = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1.\lambda} - \frac{d^{\lambda}x}{1.\lambda} + \frac{d^{\lambda+1}}{1.\lambda+1}$$

$$s''' = \frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2.\lambda+1.\lambda} - \frac{d^{\lambda}x^{2}}{2.1.\lambda} + \frac{d^{\lambda+1}x}{1.1.\lambda+1} - \frac{d^{\lambda+2}}{2.1.\lambda+2}$$

& sic porrò.

Cæterum ex terminis jam appositis satis constat ratio formandi reliquos.

SCHOLIUM.

1. Potest fluxio proposita variis modis resolvi in factores $\dot{r}$ & s, unde plerumque oriuntur series diversæ. Sic fluxio jam proposita $\dot{z}z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^{n}}|^{\lambda-1}$ etiam sic scribi potest $\dot{z}z^{\theta+\lambda n-n-1} \times \overline{b+az^{-n}}|^{\lambda-1}$. Ubi si pro $\dot{r}$, s, & $\dot{w}$ sumantur $\dot{z}z^{\lambda n-n-1}$, $\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda-1}$, & $-na\dot{z}z^{-n-1}$, & pro $a+bz^{n}$ scribatur x, exprimetur eadem fluens per series sequentes;

$$\boxed{\dot z z^{\theta-1} x^{\lambda-1}} = \frac{z^{\theta} x^{\lambda-1}}{\theta+\lambda n-n} + \frac{\lambda n-n}{\theta+\lambda n-2n}\cdot\frac{a}{x}A + \frac{\lambda n-2n}{\theta+\lambda n-3n}\cdot\frac{a}{x}B$$

$$+ \frac{\lambda n-3n}{\theta+2\lambda n-4n}\cdot\frac{a}{x}C + \&c.$$

$$\boxed{\dot z z^{\theta-1} x^{\lambda-1}} = \frac{-z^{\theta} x^{\lambda}}{\lambda n a} + \frac{\theta+\lambda n}{\lambda n+n}\cdot\frac{x}{a}A + \frac{\theta+\lambda n+n}{\lambda n+2n}\cdot\frac{x}{a}B + \frac{\theta+\lambda n+2n}{\lambda n+3n}$$

$$\cdot\frac{x}{a}C + \&c.$$

Ubi literæ A, B, C, &c. ſcribuntur pro totis terminis cum ſuis ſignis in ſeriebus reſpectivis.

2. In inveſtigatione Theorematis inveniebatur $\boxed{\dot r s} = rs - \boxed{r\dot s}$. Unde ſi pro $\dot r$ & s ſumantur $\dot z z^{\theta}$ & $\overline{a+bz^{n}}|^{\lambda}$, & pro $a+bz^{n}$ ſcribatur x, erit $\boxed{\dot z z^{\theta} x^{\lambda}} = \frac{z^{\theta+1} x^{\lambda}}{\theta+1} - \boxed{\frac{\lambda n b\dot z}{\theta+1} z^{\theta+n} x^{\lambda-1}}$,

hoc eſt, $\boxed{\dot z z^{\theta+n} x^{\lambda-1}} = \frac{z^{\theta+1} z^{\lambda}}{\theta+1} - \frac{\lambda n b}{\theta+1}\boxed{\dot z z^{\theta+1} x^{\lambda-1}}$. Datâ itaque fluente ipſius $\dot z z^{\theta} x^{\lambda}$, dabitur etiam fluens ipſius $\dot z z^{\theta-n} x^{\lambda-1}$. Unde ſi pro n ſumantur ſucceſſivè numeri quicunque integri, vel affirmativi, vel negativi, ſi datur fluens unius $\dot z z^{\theta+nn} x^{\lambda-n}$, dabuntur etiam fluentes omnium $\dot z z^{\theta+nn} x^{\lambda-n}$.

3. Poteſt etiam eadem fluxio ſic ſcribi $\dot z z^{\theta+\lambda n}\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda}$: ubi ſi jam pro $\dot r$ ſumatur $\dot z z^{\theta+\lambda n}$, & pro s ſumatur $\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda}$, erit

$$\boxed{\dot z z^{\theta} x^{\lambda}} = \frac{z^{\theta+\lambda n-1}\times\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda}}{\theta+\lambda n+1} + \frac{\lambda n a}{\theta+\lambda n+1}\boxed{\dot z z^{\theta+\lambda n-n}\times\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda-1}}$$

hoc

hoc est $\boxed{\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}} = \frac{z^{\theta+1}x^{\lambda}}{\theta+\lambda n+1} + \frac{\lambda n \sigma}{\theta+\lambda n+1}\boxed{\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda-1}}$. Data itaque fluente ipsius $\dot{z}z^{\theta}z^{\lambda}$, dabitur etiam fluens ipsius $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda-1}$, & vice versâ. Manente itaque indice θ, si continuo minuatur, vel augeatur λ per unitates, datâ fluente unius $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}$, dabuntur fluentes omnium $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}$. Et per hos duos casus conjunctos, si pro σ & τ scribantur successivè numeri quicunque integri, vel affirmativi vel negativi, manentibus θ & λ, si datur fluens unius cujusvis fluxionis $\dot{z}z^{\theta+\sigma n} \times \overline{a+bz^{n}}|^{\lambda+\tau}$, dabuntur etiam fluentes omnium fluxionum eodem modo provenientium. Et ad eundem modum pergere licet ad comparationem fluentum, ubi quantitas in vinculo radicis est trium, vel quatuor, vel plurium nominum. Sed hæc jam elegantius fiunt ab illustrissimo *Newtono* in Quadraturâ Curvarum.

PROP. XII. THEOR. V.

Sit n index ordinis fluentis ipsius $Q = \overset{\vdots}{r}s$, verbi gratiâ si $n = 2$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{''}{Q}$, si $n = 0$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{\circ}{Q} = Q$, si $n = -1$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{-1}{Q} = \dot{Q}$, & sic de cæteris; tum erit $\overset{n}{Q} = \overset{n}{r}s - \frac{n}{1}\, r\, s + \frac{n}{1}\cdot\frac{\dot n}{2}\, r\, s - \frac{n}{1}\cdot\frac{\dot n}{2}\cdot\frac{\ddot n}{3}\, r\, s +$ &c. Ubi est $\underset{\cdot}{n} = 1$, & (juxtà notationem nostram) sunt $\dot{n} = n - \underset{\cdot}{n}$, $\underset{:}{n} = n + \underset{\cdot}{n}$, $\underset{\vdots}{n} = \underset{:}{n} + \underset{\cdot}{n}$, & sic porrò.

Quando

Quando est $n = 1$ Theorema idem est cum præcedenti; unde colligitur forma seriei. Coefficientes autem 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1} \times \frac{\underset{\prime}{n}}{2}$; $\frac{n}{1} \times \frac{\underset{\prime}{n}}{2} \times \frac{\underset{\prime\prime}{n}}{3}$, &c. sic investigo.

Sint coefficientes quæsiti x, v, y, w, &c. iidemque incrementis suis $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot}{y}$, $\underset{\cdot}{w}$, &c. aucti $\underset{,}{x}$, $\underset{,}{v}$, $\underset{,}{y}$, $\underset{,}{w}$, &c. Si ergò sit $\overset{n}{Q} = x\overset{\dot{n}}{r}s + v\overset{n}{r}\dot{s} + y\overset{\underset{\prime}{n}}{r}\ddot{s} + w\overset{\underset{\prime\prime}{n}}{r}\dddot{s} + \&c.$ erit proximè $\overset{\underset{\prime}{n}}{Q} = \underset{,}{x}\overset{n}{r}s + \underset{,}{v}\overset{\underset{\prime}{n}}{r}\dot{s} + \underset{,}{y}\overset{\underset{\prime\prime}{n}}{r}\ddot{s} + \underset{,}{w}\overset{\underset{\prime\prime\prime}{n}}{r}\dddot{s} + \&c.$ Jam si coefficientes x, v, y, w, &c. sint justi valoris, manentibus coefficientibus novis $\underset{,}{x}$, $\underset{,}{v}$, $\underset{,}{y}$, $\underset{,}{w}$, &c. si capiatur fluxio novæ seriei fiet regressio in seriem priorem. Ergò capiendo fluxiones primo in r, deinde in s, fit $\overset{n}{Q} = \underset{,}{x}\overset{\dot{n}}{r}\underset{\cdot}{s} + \begin{matrix}\underset{\cdot}{v}\\ +\underset{,}{x}\end{matrix}\overset{n}{r}\dot{s} + \begin{matrix}\underset{,}{y}\\ +\underset{,}{v}\end{matrix}\overset{\underset{\cdot}{n}}{r}\ddot{s} + \begin{matrix}\underset{,}{w}\\ +\underset{,}{y}\end{matrix}\overset{\underset{\cdot\prime}{n}}{r}\dddot{s} + \&c.$ Unde comparando terminos hujus seriei cum terminis relativis seriei prioris, fit $\underset{,}{x}\,(= x + \underset{\cdot}{x}) = x$; adeoq; $\underset{\cdot}{x} = 0$. Proinde est x invariabilis. Sed subi $n = 0$ est $x = 1$; quare est semper $x = 1$. Comparando terminos secundos, fit $\underset{,}{v} + \underset{,}{x}\,(= v + \underset{\cdot}{v} + 1) = v$; adeoque $\underset{\cdot}{v}\,(= -1) = -\underset{\cdot}{n}$; &

inde $v = \frac{-n}{1} + a$. Sed ubi $n = 0$, est $v = 0$; quare est $a = 0$, & $v = \frac{-n}{1}$. Comparando terminos tertios fit $\dot{y} + \acute{v} (= \dot{y} + \acute{y} - \dot{\frac{n}{1}}) = y$; adeoque $\dot{y} = \acute{n}$; & inde $y = \frac{n\acute{n}}{1\,2} + b$. Sed ubi $n = 0$, est $y = 0$; ergo est $b = 0$, atque $y = \frac{n\acute{n}}{1\,2}$. Eodem modo fit $\dot{w} + \acute{y} (= \dot{w} + w + \acute{n}\,\ddot{n}) = y$; adeoque $\ddot{w} = -\frac{\acute{n}\,\ddot{n}}{1\,2}$ & inde $w = -\frac{n\,\acute{n}\,\ddot{n}}{1\,2\,3}$. Et sic pergendo in infinitum invenientur reliqui coefficientes, omnino ut in Theoremate exhibentur.

EXEMPLUM.

Hoc pacto ipsius $Q = \dot{z}z^{\theta-1} \times \overline{a + bz^n}|^{\lambda-1}$ $(= \dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1})$ fluens quævis in genere est

$$\text{vel } 1.\ \overset{n}{Q} = \frac{\dot{n}\,\dot{b}^{\dot{n}}\,z^{\theta+\dot{n}n}\,x^{\lambda-1}}{\theta.\theta+n.\theta+2n\ldots\ldots\theta+\dot{n}n} + \frac{n - \lambda n}{\theta + n\acute{n}}.\frac{nbz^n}{1.x}A + \frac{2n - \lambda n}{\theta + \acute{n}n}.\frac{\dot{n}bz_n}{2x}B + \frac{3n - \lambda n}{\theta + \ddot{n}n}.\frac{\ddot{n}bz^n}{3x}C + \&c.$$

$$\text{vel } 2.\ \overset{n}{Q} = \frac{z^{\theta-n}\,x^{\lambda+\dot{n}}}{\lambda.\lambda+1.\lambda+2\ldots\ldots\lambda+\dot{n}.nb} + \frac{n - \theta}{\lambda n + nn}.\frac{nx}{1bz^n}A + \frac{2n - \theta}{\lambda n + \dot{n}n}.\frac{\dot{n}x}{2bz^n}B + \frac{3n - \theta}{\lambda n + \ddot{n}n}.\frac{\ddot{n}x}{3bz^n}C + \&c.$$

, vel

vel 3. $\overset{\bar{n}}{\dot{Q}} = \dfrac{\overline{-na}|^{\grave{n}}\, z^{\theta - \grave{n}n}\, x^{\lambda-1}}{\theta-n+\lambda n.\theta-n+\lambda n-n.\theta-n+\lambda n-2n\ldots\theta-n+\lambda n-\grave{n}n} +$

$\dfrac{\lambda n - n}{\theta - n + \lambda n - nn} \cdot \dfrac{na}{1x} A + \dfrac{\lambda n - 2n}{\theta - n + \lambda n - \dot{n}n} \cdot \dfrac{\dot{na}}{2x} B + \&c.$

vel 4. $\overset{n}{Q} = \dfrac{-x^{\lambda+\grave{n}}\, z^{\theta+\grave{n}\lambda n-\grave{n}n}}{\lambda.\lambda+1.\lambda+2\ldots\ldots\lambda+\grave{n}.na} + \dfrac{\theta+\lambda n}{\lambda n+nn} \cdot \dfrac{nx}{1a} A +$

$\dfrac{\theta + \lambda n + n}{\lambda n + \acute{n}n} \cdot \dfrac{\acute{nx}}{2a} B + \&c.$

Quippe in feriebus duabus primis pro $\dot{w}$ fumpto $nb\dot{z}z^{n-1}$, & facto $\acute{Q} = \boxed{\dot{w}\,Q}$, $\acute{\acute{Q}} = \boxed{\dot{w}\,\acute{Q}}$, & fic porrò; & in feriebus duabus ultimis pro $\dot{w}$ fumpto $-{}_na\dot{z}z^{-n-1}$, & fimiliter facto $\acute{Q} = \boxed{\dot{w}\,Q}$, $\acute{\acute{Q}} = \boxed{\dot{w}\,\acute{Q}}$, & fic porrò.

Per has autem feries exhibentur tam fluxiones quam fluentes ipfius Q. Sic fi $n = -1$, feries dabit valorem $\dot{Q}$, fi $n = -2$, feries dabit valorem $\ddot{Q}$, & fic porro.

Sed in hoc cafu, ubi mutatur fignum numeri n, quædam eft difficultas in inventione coefficientis termini primi. Sit ergo exemplum methodi hoc faciendi in termino primo feriei primæ modo exhibitæ pro valore $\overset{n}{Q}$. Hujus termini coefficiens, fepofito ${}_n\grave{b}^{\grave{n}}$, eft $\dfrac{1}{\theta.\theta+n.\theta+2n\ldots\ldots\theta+\grave{n}n}$. Debet autem hujus coefficientis

cientis maximus diviſor eſſe $\theta + \grave{n}n$. Quare ut inveniatur coefficiens ubi eſt $\grave{n}$ numerus negativus, vice $\frac{1}{\theta . \overline{\theta + n} . \overline{\theta + 2n} \&c.}$, ſcribe $\frac{\&c. \overline{\theta - 4n} . \overline{\theta - 3n} . \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n} .}{\&c. \overline{\theta - 4n} . \overline{\theta - 3n} . \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n} . \theta . \overline{\theta + n} . \overline{\theta + 2n} . \&c}$. Tum rejectis omnibus diviſoribus poſt $\theta + \grave{n}n$, quando eſt $\grave{n} = 1$, coefficiens erit $\frac{\&c. \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n}}{\&c. \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n} . \theta . \overline{\theta + n}}$, hoc eſt, $\frac{1}{\theta . \overline{\theta + n}}$; quando eſt $\grave{n} = 0$, erit coefficiens $\frac{\&c. \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n}}{\&c. \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n} . \theta}$, hoc eſt $\frac{1}{\theta}$. Et eodem argumento ubi $\grave{n} = -1$, erit coefficiens $\frac{\&c. \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n}}{\&c. \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n}}$, hoc eſt 1; ubi $\grave{n} = -2$ erit coefficiens $\frac{\&c. \overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n}}{\&c. \overline{\theta - 2n}}$, hoc eſt $\theta - n$, ubi eſt $\grave{n} = -3$, coefficiens erit $\overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n}$; & ſic porro. Unde jam ſi ſit m index fluxionis quæſitæ ipſius Q, hoc eſt ſi pro $-\grave{n}$ ſcribatur m, erit $\overline{\theta - mn} . \overline{\theta - \grave{m}n} . \overline{\theta - \grave{\grave{m}}n} \ldots \overline{\theta - n}$ coefficiens numeralis termini primi ſeriei quæſitæ.

SCHOLIUM.

Pergere jam liceret ad inventionem integralium in terminis numero finitis, quarum incrementa ſingularia dantur per æquationes affectas altiorum graduum. Sed quoniam in his caſibus ſolutio quæri non poteſt niſi per calculum valde nimis prolixum, operæ pretium non duxi præcepta plura tradere in re nullius uſus futurâ. Æquationes quadraticæ revocantur ad æquationes ſimplices per extractionem radicis, atque æquationes cubicæ reſolvuntur per regulam *Cardani*, & æquationes plurium dimenſionum etiam reſolvi poſſunt per ablationem terminorum intermediorum. Quare ſi cui animus eſt rem adeo laborioſam tentare, terminis omnibus intermediis

diis exterminatis, deinde ſolutio quæri poteſt per Propoſitiones præcedentes. Tantum autem laborem paululum minuere poteſt hæc obſervatio, nempe quod in æquatione affectâ definiente valorem incrementi, termini ſecundi coefficiens eſt ſimile incrementum coefficientis termini ſecundi in æquatione definiente valorem ipſius integralis. Quare facto periculo in coefficiente termini ſecundi, ſi is revocari nequit ad integralem in terminis numero finitis, fruſtra erit ſolutionem finitam quærere in cæterâ æquatione.

Principiis Methodi Incrementorum & Methodi Fluxionum jam breviter explicatis, ſupereſt ut in parte alterâ hujus opuſculi exemplis aliquot oſtendamus, quantus ſit uſus hujus rei in ſolutione difficiliorum quorundam Problematum.

METHODUS Incrementorum.

PARS SECUNDA.

Ubi Exemplis aliquot ostenditur quomodo hæc Methodus sit applicanda ad Problemata Mathematica & Physica.

PROP. XIII: PROB. VIII.

Datis aliquot terminis æquedistantibus in Serie quantitatum, invenire terminos intermedios, & ulteriores quam proximè ex datis eorum distantiis ab alterutro termino extremo dato.

SUNTO a, b, c, d, termini æquedistantes dati, & requiratur terminus alius aliquis ex datâ suâ distantiâ a termino extremo a.

Sumantur terminorum datorum differentiæ, deinde differentiarum differentiæ, & sic porrò, donec perventum sit ad differentiam

ferentiam ultimam, & ſint differentiæ illæ ſub propriis ſignis $\underset{\cdot}{a} (= b - a,)$ $\underset{\cdot}{b} (= c - b,)$ $\underset{\cdot}{c} (= d - c,)$ $\underset{\cdot\cdot}{a} (= \underset{\cdot}{b} - \underset{\cdot}{a},)$ $\underset{\cdot\cdot}{b} (= \underset{\cdot}{c} - \underset{\cdot}{b},)$ $\underset{\therefore}{a} (= \underset{\cdot\cdot}{b} - \underset{\cdot\cdot}{a}.)$ Iam pro quolibet termino ſeriei in genere ſcribe x, & pro ejuſdem termini diſtantiâ a termino a ſcribe z, & ſit ipſius z incrementum $\underset{\cdot\cdot}{z}$ æquale diſtantiæ datæ inter terminos datos a, b, c, d, atque finge omnes terminos ſeriei in genere exprimi per æquationem $x = A + Bz + Cz\dot{z} + 3Dz\dot{z}\ddot{z}$. Tum (per *Prop.* I.) differentia inter duos valores ipſius x ad diſtantiam ab invicem $\underset{\cdot}{z}$ exprimetur per æquationem $\underset{\cdot}{x} = B\underset{\cdot}{z} + 2Cz\underset{\cdot}{z} + 3Dz\dot{z}\underset{\cdot}{z}$, & hujuſmodi differentiarum differentiæ exprimentur per æquationem $\underset{\cdot\cdot}{x} = 2C\underset{\cdot}{z}^2 + 2.3Dz\underset{\cdot}{z}^2$, & differentia tertia per æquationem $\underset{\therefore}{x} = 2.3D\underset{\cdot}{z}^3$. Sed ubi eſt $z = 0$, ſunt $x = a$, $\underset{\cdot}{x} = \underset{\cdot}{a}$, $\underset{\cdot\cdot}{x} = \underset{\cdot\cdot}{a}$, $\underset{\therefore}{x} = \underset{\therefore}{a}$; unde per has æquationes fiunt $A = a$, $B\underset{\cdot}{z} = \underset{\cdot}{a}$, $2C\underset{\cdot}{z}^2 = \underset{\cdot\cdot}{a}$, $2.3D\underset{\cdot}{z}^3 = \underset{\therefore}{a}$, adeoque $A = a$, $B = \frac{\underset{\cdot}{a}}{\underset{\cdot}{z}}$, $C = \frac{\underset{\cdot\cdot}{a}}{2\underset{\cdot}{z}^2}$, $D = \frac{\underset{\therefore}{a}}{2.3\underset{\cdot}{z}^3}$, & exinde

$$x = a + \frac{\underset{\cdot}{a}}{\underset{\cdot}{z}} z + \frac{\underset{\cdot\cdot}{a}}{2\underset{\cdot}{z}^2} z\dot{z} + \frac{\underset{\therefore}{a}}{2.3\underset{\cdot}{z}^3} z\dot{z}\ddot{z}. \quad \textit{Q.E.I.}$$

Hæc æquatio convenit accurate cum ipſis terminis datis a, b, c, d, & quam proximè cum intermediis & ulterioribus. Sed quo plures termini dentur, conſtat eo propius acceſſuram hanc æquationem ad valores omnium terminorum, tum intermediorum, tum & ulteriorum. Quare ſi ſeries terminorum datorum continuetur in infinitum, æquatio tandem coincidet accuratè cum valoribus terminorum omnium, cum intermediorum, tum ulteriorum. Proinde ſi detur

detur lex formandi terminos æquidiſtantes in ſerie aliquâ, per hanc propoſitionem dabitur ſeries infinita exprimens valores omnium terminorum intermediorum etiam & ulteriorum totius ſeriei.

EXEMPLUM.

Sit hujus rei exemplum in ſerie terminorum, ubi termini æquidiſtantes ſemper ſunt in ratione continuâ Geometricâ. In hâc ſerie ſint a & $a+ab$ termini duo ad diſtantiam $\underset{.}{z}$; tum ex natura hujus progreſſionis erunt omnes termini ad eandem diſtantiam a, $a+ab$, $a\times\overline{1+b}|^2$ $a\times\overline{1+b}|^3$, &c. & differentiæ primæ hujuſmodi terminorum erunt ab, $ab\times\overline{1+b}$, $ab\times\overline{1+b}|^2$, &c. differentiæ ſecundæ erunt ab^2, $ab^2\times\overline{1+b}$, $ab^2\times\overline{1+b}|^2$, &c. differentiæ tertiæ erunt ab^3, $ab^3\times\overline{1+b}$, $ab^3\times\overline{1+b}|^2$, &c. & ſic porrò. Unde ad mentem hujus Propoſitionis erunt $a=a$, $\underset{.}{a}=ab$, $\underset{..}{a}=ab^2$, $\underset{\because}{a}=ab^3$, &c. adeoque ſi z ſit diſtantia alicujus termini x a termino a erit $x=a+\frac{abz}{1\underset{.}{z}}+$ $\frac{ab^2z\grave{z}}{1.2\underset{.}{z}^2}+\frac{ab^3z\grave{z}\grave{\grave{z}}}{1.2.3\underset{.}{z}^3}+$ &c. vel $\frac{x}{a}=1+\frac{bz}{1\underset{.}{z}}+\frac{b^2z\grave{z}}{1.2\underset{.}{z}^2}+\frac{b^3z\grave{z}\grave{\grave{z}}}{1.2.3\underset{.}{z}^3}$ $+$&c. Sed in hoc caſu eſt $\frac{x}{a}=\overline{1+b}|^{\frac{z}{\underset{.}{z}}}$, unde fit $\overline{1+b}|^{\frac{z}{\underset{.}{z}}}=1+$ $\frac{bz}{1\underset{.}{z}}+\frac{b^2z\grave{z}}{1.2\underset{.}{z}^2}+\frac{b^3z\grave{z}\grave{\grave{z}}}{1.2.3\underset{.}{z}^3}+$ &c. Coincidit hæc ſeries cum Theoremate *Newtoniano* pro inventione dignitatis Binomii.

Quod Theorema etiam inveſtigari poteſt ad hunc modum.

Sit $\overline{a+b}|^n=\underset{.}{a}^n+xba^{n-1}+vb^2a^{n-2}+zb^3a^{n-3}+$ &c. Tum ductâ ferie in $a+b$ erit $\overline{a+b}|^{n+1}$, vel juxta notationem noftram $\overline{a+b}|^{n}{}'$ æquale.

$$\overset{n}{a}{}' + \begin{array}{c} xb\overset{n-1}{a}{}' \\ +1 \end{array} + \begin{array}{c} vb^2\overset{n-2}{a}{}' \\ +x \end{array} + \begin{array}{c} zb^3\overset{n-3}{a}{}' \\ +v \end{array} + \&c.$$ Unde exiftente $n = 1$, per Methodum Incrementorum erit $\underset{\cdot}{x} = 1$, adeoque $x = \frac{n}{1}$; $\underset{\cdot}{v} = x \,(= n,)$ adeoque $v = \frac{n\grave{n}}{1.\,2}$; $\underset{\cdot}{z} = v \left(= \frac{n\grave{n}}{1.\,2.}\right)$ adeoq; $z = \frac{n\grave{n}\grave{\grave{n}}}{1.\,2.\,3}$; & fic porrò; (ubi fumuntur omnes integrales purè, quoniam debent omnes evanefcere ubi eft $n = 0$,) unde fit

$$\overline{a+b}|^{n} = \overset{n}{a} + \frac{n}{1} b\overset{n-1}{a} + \frac{n\grave{n}}{1.2} b^2\overset{n-2}{a} + \frac{n\grave{n}\grave{\grave{n}}}{1.\,2.\,3} b^3\overset{n-3}{a} + \&c.$$

hoc eft $\overline{a+b}^{\,n} = a^n + \frac{n}{1}\frac{b}{a}A + \frac{n-1}{2}\frac{b}{a}B + \frac{n-2}{3}.\frac{b}{a}C$ + &c. nempe pro fingulis terminis feriei cum propriis fignis fcriptis A, B, C, &c.

PROP. XIV. PROB. IX.

Datâ ratione formandi terminos in ferie quantitatum, invenire aggregatum terminorum quotvis æquidiftantium.

Si fit x fumma quæfita, eadem aucta termino amplius uno erit $x + \underset{\cdot}{x}$. Quare datâ lege formandi terminos fi fiat $\underset{\cdot}{x}$ æqualis termino proxime addendo, dabitur integralis x in terminis generalibus, per

Prop.

Prop. 10. Quæ ut fiat æqualis summæ quæsitæ, demendus est valor ejusdem integralis, qui prodit quando debet summa quæsita esse nihil.

EXEMP. I.

Sit exemplum in serie terminorum æquedistantium, a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, &c. In hac serie pro termino ultimo semper scripto z, erit $\underset{\cdot}{z} = b$, atque terminus summæ quæsitæ proxime addendus erit $z + \underset{\cdot}{z}$, vel $\underset{,}{z}$; adeoque erit $\underset{\cdot}{x} = \underset{,}{z}$. Unde regrediendo ad integrales erit $x = \dfrac{z\underset{,}{z}}{2\underset{\cdot}{z}} + A$. Debet autem hæc summa æquari nihilo, quando terminus proxime addendus est a, hoc est, quando est $\underset{\cdot}{z} = a$, adeoque & $z = a - \underset{\cdot}{z}$; adeoque a summa $\dfrac{z\underset{,}{z}}{2\underset{\cdot}{z}} + A$, ablata summa $\dfrac{\overline{a-\underset{\cdot}{z}} \times a}{2\underset{\cdot}{z}} + A$, residuum $\dfrac{z\underset{,}{z} - \overline{a-\underset{\cdot}{z}} \times a}{2\underset{\cdot}{z}}$ erit summa quæsita, hoc est, (pro $\underset{\cdot}{z}$ restituto b)

$$x = \frac{z \times \overline{z+b} - \overline{a-b} \times a}{2b}.$$

EXEMP. II.

Ad eundem modum si terminus ultimus sit $z\underset{,}{z}$, atque terminus primus is sit in quo est $z = a$, hoc est $a \times \overline{a+\underset{\cdot}{z}}$, termino post ultimum proximè addendo existente $\underset{,}{z}\underset{,,}{z}$, erit $\underset{\cdot}{x} = \underset{,}{z}\underset{,,}{z}$; adeoque

$$x = \frac{z\underset{,}{z}\underset{,,}{z}}{3\underset{\cdot}{z}} - \frac{\overline{a-\underset{\cdot}{z}} \times a \times \overline{a+\underset{\cdot}{z}}}{3\underset{\cdot}{z}}$$

Et ad eundem modum pergere licet ad summationes terminorum, in quibus sunt plures factores $z \times \underset{,}{z} \times \underset{,,}{z} \times$ &c.

EXEMP.

EXEMP. III.

Inveniendum sit aggregatum terminorum, quorum ultimus semper est $\frac{1}{z z_{\prime}}$, & quorum primus is est in quo est $z = a$. In hoc casu terminus summæ quæsitæ proxime addendus est $\frac{1}{z_{\prime} z_{\prime\prime}}$. Quare facto $\underset{\cdot}{x} = \frac{1}{z_{\prime} z_{\prime\prime}}$, deinde regrediendo ad integrales erit $x = A - \frac{1}{z \underset{\cdot}{z}}$. Sed ubi terminus proxime addendus est $\frac{1}{a \times a + \underset{\cdot}{z}}$, hoc est, ubi est $z_{\prime} = a$, debet summa quæsita æquari nihilo; unde fit $A = \frac{1}{\underset{\cdot}{z}\, a}$ adeoque $x = \frac{1}{z a} - \frac{1}{z \underset{\cdot}{z}}$.

COROLLARIUM.

Et hinc datur summa omnium terminorum $\frac{1}{a . a + \underset{\cdot}{z}} + \frac{1}{a + \underset{\cdot}{z} . a + 2\underset{\cdot}{z}} + \frac{1}{a + 2\underset{\cdot}{z} . a + 3\underset{\cdot}{z}} +$ &c. in infinitum. Nam in hac serie in infinitum continuata in termino ultimo est divisor z infinitus. Proinde evanescente termino $\frac{1}{z z_{\prime}}$ in valore x fit $x = \frac{1}{\underset{\cdot}{z}\, a}$.

Et ad eundem modum pergere licet ad summas terminorum in quibus sunt plures divisores z, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, &c.

PROP.

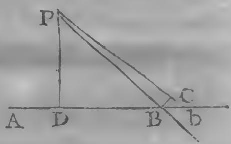
PROP. XV. PROB. X.

Invenire Fluxiones in datis Figuris Geometricis.

Hoc quomodo ſit faciendum exemplis melius, quam præceptis patebit.

EXEMP. I.

Sit ergò primum exemplum in figura APB, ubi datis poſitione rectâ AB, & puncto P, quæritur ratio fluxionum rectæ AB, & diſtantiæ PB.

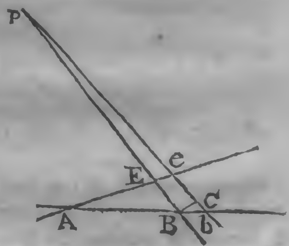


" Progrediatur recta PB de loco " ſuo PB in locum novum P*b*. In " P*b* capiatur PC = PB, & ad AB " ducatur PD ſic, ut angulus *b*PD æqualis ſit angulo *b*BC; & ob " ſimilitudinem triangulorum *b*BC, *b*PD, erit augmentum B*b* ad " augmentum C*b*, ut P*b* ad D*b*. Redeat jam P*b* in locum ſuum " priorem PB, ut augmenta illa evaneſcant, & evaneſcentium ratio " ultima, id eſt ratio ultima P*b* ad D*b*, ea erit quæ eſt PB ad DB, " exiſtente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione eſt fluxio " ipſius AB ad fluxionem ipſius PB.

EXEMP. II.

" Recta PB circa datum po- " lum P revolvens ſecet alias " duas poſitione datas rectas " AB & AE in B & E: quæ- " ritur proportio fluxionum " rectarum illarum AB & AE.

" Progrediatur recta revol- " vens PB de loco ſuo PB in " locum novum P*b* rectas AB



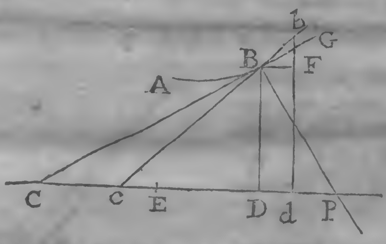
" AE in punctis *b* & *e* secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur
" ipsi P*b* occurrens in C, & erit B*b* ad EC ut A*b* ad A*e*, & BC ad
" E*e* ut PB ad PE, & conjunctis rationibus B*b* ad E*e* ut A*b* × PB
" ad A*e* × PE. Redeat jam linea P*b* in locum suum priorem PB,
" & augmentum evanescens B*b* erit ad augmentum evanescens E*e*
" ut AB × PB ad AE × PE, ideoque in hâc ratione est fluxio rectæ
" AB ad fluxionem rectæ AE.

" Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis curvas positione datas
" secet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE curvas
" illas tangant in sectionum punctis B & E; erit fluxio curvæ quam
" recta AB tangit ad fluxionem curvæ quam recta AE tangit ut
" AB × PB ad AE × PE. Id quod etiam eveniet si recta PB cur-
" vam aliquam positione datam perpetuo tangat in puncto mobili P.

Petuntur hæc duo exempla ex *Newtonianis*.

E X E M P. III.

Sit AB curva quævis positione data, & ab ejus puncto quovis B ducatur recta BD secans rectam positione datam ED in angulo dato in D; quæritur proportio fluxionum, abscissæ ED, ordinatæ DB, & curvæ AB.



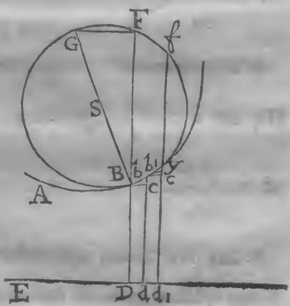
Moveatur ordinata BD de loco suo BD in locum novum *bd*, & ducatur BF parallela ED, & occurrens *bd* in F, & per puncta *b* & B, ducatur *b*B occurrens ED in *c*, & ad punctum B ducatur tan-
gens

gens occurrens ED, db in C & G. Tum ob similia triangula BFb, cDB, erit BF : Fb : Bb : : cD : DB : cB. Redeat jam ordinata bd in locum suum priorem BD, & rectâ cB jam coincidente cum tangente CB, erunt augmenta nascentia abscissæED, ordinatæ DB, & ipsius curvæ AB inter se, ut latera trianguli nascentis BFG, vel ei similis trianguli CDB ; ideoque in hâc ratione erunt fluxiones rectarum ED, DB, & curvæ AB. Et si angulus BDE sit rectus, ductâ ad curvam normali BP occurrente ED in P, ob similia triangula BFG, BDP, erunt eædem fluxiones inter se ut latera trianguli BDP.

Hinc datâ ratione ducendi tangentes ad curvam aliquam propositam, dabitur proportio fluxionum abscissæ, ordinatæ, & ipsius curvæ ; atque vicissim ex datâ proportione fluxionum abscissæ & ordinatæ, dabitur proportio inter subtangentem CD, ordinatam DB, & ipsam tangentem CB ; ut & proportio inter ordinatam BD, subnormalem DP, & normalem BP. Datâ autem æquatione definiente relationem inter abscissam ED, & ordinatam DB, datur proportio fluxionum (per *Prop.* I.) Quare per istam propositionem duci possunt tangentes & normales ad omnes curvas.

EXEMP. IV.

Sit curva quævis AB, & propositum sit invenire radium curvaturæ in puncto B, hoc est, radium circuli cujus curvatura eadem sit, quæ curvæ AB in puncto B.



Duc ordinatas tres æquidistantes BD, bd, $b1\ d1$, secantes rectam positione datam ED ad angulos rectos in D, d, $d1$, & ipsi ED parallelas duc BC, bc, occurrentes bd, $b1\ d1$, in C

&

&c, & duc Bb occurrentem $b_1 d_1$ in y, & per puncta tria B, b, b_1, transeat circulus cujus centrum sit S, occurrens DB & $d_1 b_1$ in F & f, & duc diametrum BG, atque FG. Sint autem abscissa $ED = z$, ordinata $DB = x$, & curva $AB = v$. Tum juxta Methodum Incrementorum erit $Dd = \dot{z}$ $(= dd_1 = BC = bc,)$ $Cb = \dot{x}$ $(= cy,)$ & $yb_1 = \ddot{x}$. Sit etiam $Bb = (by =)\, \dot{u}$. Tum ex natura circuli erit

$yb_1 \times yf = yB \times yb$, hoc est $yf = \frac{2\dot{u}\dot{u}}{\ddot{x}}$. Sed coincidentibus punctis B, b, b_1, erit arcus evanescens Bbb_1 circulo & curvæ AB communis, ideoque in hoc casu erit circulus centro S descriptus curvæ AB æquicurvus in B. Evanescant itaque incrementa, & jam coincidente yf cum ipso BF, & facto $\frac{\dot{u}\dot{u}}{\ddot{x}} = \frac{\dot{v}\dot{v}}{\ddot{x}}$, erit $BF = \frac{2\dot{v}\dot{v}}{\ddot{x}}$.
Sed coincidentibus punctis B & b, est BF ad BG, ut BC ad Bb, hoc est, ut $\dot{z}$ ad $\dot{v}$. Unde fit $BG = \frac{2\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}$, & radius curvaturæ

$$BS = \frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}.$$

Si sit p ad curvam normalis intercepta inter punctum B & axem ED, erit $\dot{v} = \frac{p\dot{z}}{x}$ (per *Ex.* 3.) Unde fit etiam radius curvaturæ

$$BS = \frac{p^3 \dot{z}^2}{x^3 \ddot{x}}.$$

Et hæc fiunt fluente uniformiter z. Sed si cupis invenire expressionem ejusdem radii ubi fluit uniformiter v, per æquationem $\dot{v}\dot{v} =$ $\dot{x}\dot{x} +$

$\dot{x}\dot{x} + \dot{z}\dot{z}$ (adhuc fluente uniformiter z) fiet $2\dot{v}\ddot{v} = 2\dot{x}\ddot{x}$, hoc eſt $\ddot{x} = \frac{\dot{v}\ddot{v}}{\dot{x}}$, & inde BS $= \frac{\dot{v}^2\dot{x}}{\ddot{v}\dot{z}}$. Jam ut fluat uniformiter v, pro $\ddot{v}$ ſcribe $\frac{-\ddot{z}\dot{v}}{\dot{z}}$, per Prop. 3 vel neglecto ſigno quod ſolum indicat ipſum $\dot{z}$ decreſcere creſcente ED, quando curva eſt versùs axem convexa, ut in hoc ſchemate exhibetur,) BS $= \frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$.

Sit hujus rei exemplum in quavis ſectione conica, exiſtente $ax^2 = dz^2 - da^2$; ubi eſt d ſemi-parameter ad ſemi-axem a, in quo ſumitur abſciſſa z. Tum fluente uniformiter z, erit $2ax\dot{x} = 2dz\dot{z}$, adeoque $\dot{x} = \frac{dz\dot{z}}{ax}$: atque iterum capiendo fluxiones

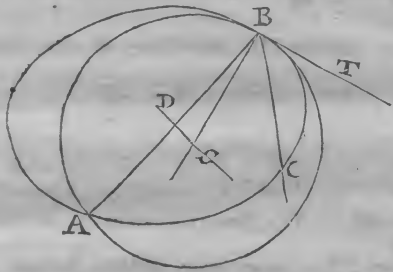
$$\ddot{x} = \left(\frac{d\dot{z}\dot{z}ax - a\dot{x}dz\dot{z}}{a^2x^2} = \frac{da^2x^2\dot{z}^2 - d^2az^2\dot{z}^2}{a^3x^3} = \right)\frac{-d^2\dot{z}^2}{x^3}.$$ Unde fit

$$\text{BS} = \left(\frac{p^3\dot{z}^2}{x^3\ddot{x}} = \right)\frac{-p^3}{d^2};$$ ubi ſignum — tantùm indicat centrum S cadere infra punctum B, quod nos quæſivimus ſupra B. Ergò in omni ſectione conicâ eſt radius curvaturæ quartum proportionale ſemiparametro ad utrumvis axem, & ad curvam normali terminatæ ad eundem axem. Quare ad extremitatem axis eſt radius curvaturæ æqualis ipſi ſemiparametro ad eundem axem. Sit enim a ſemi-axis ad cujus extremitatem quæritur radius curvaturæ, & d ejuſdem ſemi-parameter; & ſit p ad curvam normalis terminata ad axem alterum, (cujus ſemiparameter eſt $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}}$.) Tum erit radius curvaturæ $= \frac{p^3d}{a^3}$.

R Sed

Sed in vertice diametri a eſt $p = a$; quare in hoc caſu eſt radius curvaturæ d. Hanc autem expreſſionem radii curvaturæ in coniſecti-onibus primus invenit clariſſimus *Newtonus*.

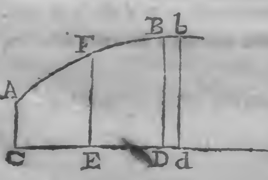
Cæterum deſcriptâ jam ſectione conicâ, poteſt idem radius determinari Geometricè per conſtructionem ſequentem.



Sit ABC data ſectio conica, & quæratur radius curvaturæ ad punctum B. Duc tangentem BT, eique perpendicularem BS, & ducatur BC parallela alterutri axium, atque fiat angulus CBA æqualis angulo CBT, & occurrat BA coniſectioni in A. Tum biſectâ AB in D, & erectâ perpendiculari DS occurrente BS in S, erit S centrum circuli oſculatorii. Hujus demonſtratio eſt perfacilis.

PROP. XVI. PROB. XI.

Curvas omnes quadrare.



Sit AB curva quadranda, cujus abſciſſa eſt CD, & ordinata DB. Moveatur ordinata de loco ſuo BD in locum novum *bd*, atq; ſpatium BD*db* erit augmentum areæ reſpondens abſciſſæ augmento

augmento Dd. Redeat ordinata bd in locum suum priorem BD, atque erit ultimò spatium BDdb æquale BD x Dd; quare si abscissa CD sit z, & ordinata BD dicatur y, erit fluxio areæ æqualis $\dot{z}y$. Inventâ itaque fluente ipsius $\dot{z}y$ (per *Prop.* 10.) si dematur fluens proveniens per abscissam CE a fluente proveniente per abscissam CD, vel si invariabilis incognita in expressione fluentis determinetur faciendo fluentem provenientem per abscissam CE æqualem nihilo, dabitur area FEDB descripta per motum ordinatæ de EF in DB.

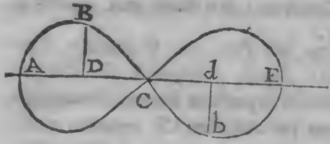
EXEMP. I.

Sit abscissa ad datum punctum C terminata CD $= z$, & ordinata DB $= y$, atque sumptâ aliquâ lineâ pro unitate sit $y = z^{n-1}$. Tum erit fluxio areæ æqualis $\dot{z}z^{n-1}$, cujus fluens est $\frac{z^n}{n} + A$. Sit data aliqua abcissa CE $= a$, tum demptâ fluente $\frac{a^n}{n} + A$ a fluente $\frac{z^n}{n} + A$, (vel facto $\frac{a^n}{n} + A = 0$, unde fiat $A = \frac{-a^n}{n}$) erit $\frac{z^n}{n} - \frac{a^n}{n}$ æquale areæ adjacenti ad abscissam ED.

Ubi est n numerus negativus, ut sit $y = z^{-n-1}$, erit area EFBD $= \frac{z^{-n}}{-n} - \frac{a^{-n}}{-n}$, hoc est $\frac{1}{na^n} - \frac{1}{nz^n}$. Si jam fiat abscissa z infinita, evanescente termino $\frac{1}{nz^n}$ fiet area EFBD adjacens abscissæ ultra ordinatam EF in infinitum productæ æqualis $\frac{1}{na^n}$. Et semper ubi fluentis signum contrarium est signo fluxionis, area per fluentem expressa adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ. Nam contrarietas signorum monstrat fluentem minui dum augetur abscissa, & vice versâ.

EXEMP.

EXEMP. II.



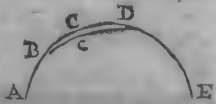
Sit curva quadranda ABCb, cujus abſciſsâ AD exiſtente z, ejus ordinatim applicata DB eſt $\overline{1-z} \times \overline{2z-z^2}|^{\frac{1}{2}}$. Fluxio areæ in hac curva eſt $\dot{z} \times \overline{1-z} \times \overline{2z-z^2}|^{\frac{1}{2}}$. Cujus fluens, purè ſumpta abſque correctione, eſt $\frac{1}{3}|\overline{2z-z^2}|^{\frac{3}{2}}$. Eſt autem hæc fluens æqualis nihilo, vel ubi $z = 0$, vel ubi $z = 2$. Itaque in axe AD ſumpto AE $= 2$, terminatur atea per hanc fluentem expreſſa, vel ad punctum A vel ad punctum E. Ubi eſt $z < 1$, (vel AC, exiſtente puncto C medio inter A & E) in primo caſu eſt area ADB, in ſecundo caſu eſt differentia inter areas CbEC atque CDBC. Sed ubi eſt z ($=$ Ad) > 1, in primo caſu eſt area differentia inter areas ABCA, atque CdbC ; in ſecundo caſu eſt area dbEd.

Poſitiones hujuſmodi arearum colliguntur ex ſignis expreſſionum ordinatæ, atque areæ. Sic in caſu præſenti, exiſtente $z < 1$, tam ordinata quam area ſunt affirmativæ ; quare aucta abſciſſa z, augetur area quæſita ; quæ proinde eſt, vel ABD, vel differentia inter areas CEbC atque CBDC. Sed ubi eſt $z > 1$, ordinata, atque area ſigna habent contraria, nam in hoc caſu expreſſio ordinatæ $\overline{1-z} \times \overline{2z-z^2}|^{\frac{1}{2}}$ eſt quantitas negativa, expreſſione areæ $\frac{1}{3}\,\overline{2z-z^2}|^{\frac{3}{2}}$ ſemper exiſtente affirmativa ;) unde creſcente abſciſſa z decreſcit area ; adeoque exprimitur, vel per differentiam inter areas ABC & CDb, vel per aream dEb. Areæ autem dEb ſignum eſt affirmativum, quoniam adjacet tam abſciſſæ dE, quam ordinatæ db negativis.

LEM-

LEMMA III.

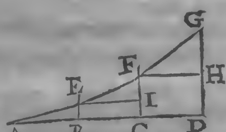
Si lineæ alicujus ABCDE figura talis sit, ut factum aliquod toti lineæ respondens majus sit, vel minus, quam simile factum ubi linea aliam induit figuram; etiam lineæ ejusdem partis cujusvis BCD figura talis erit, ut ei respondens facti pars major sit, vel minor, quam si pars illa BCD aliam quamvis induat figuram BcD.



Nam si facti pars respondens lineæ BcD major sit, vel minor, quam simile factum respondens lineæ BCD; tum conjunctim erit totum factum respondens lineæ ABcDE majus, vel minus, quam simile factum respondens Lineæ ABCDE, contra hypothesin.

LEMMA IV.

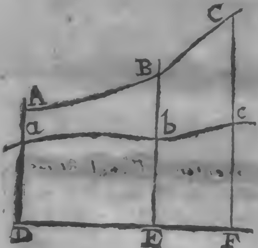
In rectâ AB positione datâ sumantur puncta quatuor æquidistantia A, B, C, D, & erigantur normales BE, CF, DG, per quarum terminos E, F, G ducantur rectæ AE, EF, FG, & ducatur FH parallela ipsi AB occurrens DG in H. Datis punctis A & G, & summa rectarum AE, EF, FG, quæritur ratio fluxionum linearum BE, GH, quando figura tota evanescit & fit AEFG elementum curvæ.



Duc EI parallelam ipsi AD & occurrentem CF in I atque

Sunto BE $= a$, IF $= b$, HG $= c$, AE $= d$, EF $= e$, FG $= f$. Tum ob datas summas $a + b + c$ (= DG,) & $d + e + f$, capiendo fluxiones erit $\dot a + \dot b + \dot c = 0$, (hoc est $\dot b = -\dot a - \dot c$,) item $\dot d + \dot e + \dot f = 0$. Sed ob datas AB, EI, FH, & ob angulos rectos in B, I, & H, sunt $\dot d = \frac{a\dot a}{d}$, $\dot e = \frac{b\dot b}{e}$ $\left(= \frac{-b\dot a - b\dot c}{e},\right)$ atq; $\dot f = \frac{c\dot c}{f}$. Quare est $\frac{a\dot a}{d} + \frac{-b\dot a}{e} - \frac{b\dot c}{e} + \frac{c\dot c}{f} = 0$, hoc est $\dot c : \dot a :: \frac{b}{e} - \frac{a}{d} : \frac{c}{f} - \frac{b}{e}$. Sed ubi AEFG est elementum curvæ, si sit ordinata x & curva v, erit $a = \dot x$, $b = \dot x + \ddot x$, $c = \dot x + 2\ddot x + \dddot x$, $d = \dot v$, $e = \dot v + \ddot v$, $f = \dot v + 2\ddot v + \dddot v$; adeoq; $\dot c : \dot a ::$ $\frac{\dot x + \ddot x}{\dot v + \ddot v} - \frac{\dot x}{\dot v} : \frac{\dot x + 2\ddot x + \dddot x}{\dot v + 2\ddot v + \dddot v} - \frac{\dot x + \ddot x}{\dot v + \ddot v}$; vel si pro $\frac{\dot x}{\dot v}$ scribatur y, erit $\dot c : \dot a :: \dot y : \dot y + \ddot y$. Nam si $\frac{\dot x}{\dot v} = y$, erit $\frac{\dot x + \ddot x}{\dot v + \ddot v} = y + \dot y$, atque $\frac{\dot x + 2\ddot x + \dddot x}{\dot v + 2\ddot v + \dddot v} = y + 2\dot y + \ddot y$.

PROP. XVII. PROB. XII.



Detur positione recta DE, & ducta perpendiculari DA, per punctum A transeat curva ABC, cujus ordinata perpendicularis est BE; atque sit abc alia curva, cujus ordinata perpendicularis Eb quovis modo dato componitur ex abscissa communi DE, ordinatâ BE, *BE, & curva AB. Quæritur forma curvæ ABC, quando area DabE est omnium arearum per ordinatas bE hoc modo provenientes descriptarum maxima, ex data basi DF, ordinatis DA, FC, & longitudine curvæ interceptæ ABC.*

Sit abscissa DE $= z$, ordinata BE $= x$, curva AB $= v$, atque ordinata Eb = P. Per *Lem.* 3. eadem proprietas convenit curvæ particulæ cuivis datæ. Sit ergo (vid. fig. *Lem.* 4.) punctum A extremitas ordinatæ BE in præsenti figurâ, atque sit AEFG particula curvæ quæsitæ, & existente P ordinata bE pertinente ad punctum A, sit $\acute{P}$ similis ordinata pertinens ad punctum E, atque $\acute{\acute{P}}$ tertia ordinata bE pertinens ad punctum F. Tum areæ DabE particula respondens curvæ particulæ AEFG erit $\dot{z}P + \dot{z}\acute{P} + \dot{z}\acute{\acute{P}}$, quæ cum debeat esse extrema, ejus fluxio erit nihil (per method. maximorum & minimorum.) Fluxiones autem sunt æstimandæ per motus punctorum tantum E & F sursum & deorsum. Unde existentibus $\ddot{z}$ & $\dot{P}$ æqualibus nihilo, ob defectum motus punctorum A, B, C, D, erit $\dot{z}\dot{\acute{P}} + \dot{z}\dot{\acute{\acute{P}}} = 0$, hoc est $\dot{\acute{P}} + \dot{\acute{\acute{P}}} = 0$.

Sit in genere $\dot{P} = Q\dot{z} + R\dot{x} + S\dot{v}$. Tum pro Q, R, & S pertinentibus ad puncta E & F scriptis Q, R, S, & $\acute{Q}$, $\acute{R}$, $\acute{S}$; atque pro $\dot{z}, \dot{x}, \dot{v}$, in valoribus ipsorum $\dot{\acute{P}}$ & $\dot{\acute{\acute{P}}}$ scriptis motibus punctorum E, B, F, & C, prout designantur in *Lemmate* 4. erit $\dot{\acute{P}} = R\dot{a} + S\dot{d}$, atque $\dot{\acute{\acute{P}}} = -\acute{R}\dot{c} - \acute{S}\dot{f}$, vel pro $\dot{d}$ & $\dot{f}$ scriptis ipsorum valoribus $\frac{a\dot{a}}{d}$ atque $\frac{c\dot{c}}{f}$) $\dot{\acute{P}} = R\dot{a} + S\frac{a\dot{a}}{d}$, atque $\dot{\acute{\acute{P}}} = -\acute{R}\dot{c} -$

$\acute{S}$

$\dot{S}\frac{c\dot{c}}{f}$. Unde fit $\dot{c}:\dot{a}::R+S\frac{a}{d}:\dot{R}+\dot{S}\frac{c}{f}$. Sed (per *Lem.* 4.) eſt $\dot{c}:\dot{a}::\dot{y}:\dot{y}+\ddot{y}$. Quare (ut in *Lemmate* iſto, pro $\frac{a}{d}$ vel $\frac{\dot{x}}{\dot{v}}$ ſcripto y, ut ſit etiam $\frac{c}{f}=y+2\dot{y}+\ddot{y}$) erit $R+Sy:\dot{R}+\overline{\dot{S}\times y+2\dot{y}+\ddot{y}}::\dot{y}:\dot{y}+\ddot{y}$. Pro $\dot{R}$ & $\dot{S}$ ſcribe $R+\dot{R}$ atque $S+\dot{S}$, atque fiet $R+Sy:R+\dot{R}+Sy+2S\dot{y}+S\ddot{y}+\dot{S}y+2\dot{S}\dot{y}+\dot{S}\ddot{y}::\dot{y}:\dot{y}+\ddot{y}$, atque dividendo $R+Sy:\dot{R}+2S\dot{y}+S\ddot{y}+\dot{S}y+2\dot{S}\dot{y}+\dot{S}\ddot{y}::\dot{y}:\ddot{y}$, vel (in primò conſequente rejectis evaneſcentibus $S\ddot{y}$, $2\dot{S}\dot{y}$, & $\dot{S}\ddot{y}$,) $R+Sy:\dot{R}+2S\dot{y}+\dot{S}y::\dot{y}:\ddot{y}$, hoc eſt $\dot{R}\dot{y}-R\ddot{y}+\dot{S}y\dot{y}+2S\dot{y}\dot{y}-Sy\ddot{y}=0$. Eſt hæc æquatio fluxionalis irreducibilis; quare pro $y, \dot{y}, \ddot{y}$, ſcriptis eorum valoribus per $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$, & $\dot{v}, \ddot{v}, \dddot{v}$ expreſſis fiet $\dot{R}\ddot{x}\dot{v}^2-R\dddot{x}\dot{v}^2+3R\ddot{x}\dot{v}\ddot{v}+\dot{S}\dot{x}\ddot{x}\dot{v}+2S\ddot{x}^2\dot{v}-S\dot{x}\dddot{x}\dot{v}+S\dot{x}\ddot{x}\ddot{v}=0$. Et ope hujus æquationis, una cum æquatione $\dot{v}\dot{v}=\dot{x}\dot{x}+\dot{z}\dot{z}$, (nempe pro R, $\dot{R}$, S, & $\dot{S}$, ſcriptis eorum valoribus per z, x, v, & eorum fluxiones expreſſis) dabuntur fluentes x, & v (per *Prop.* 6.) In reſolutione autem harum æquationum erunt quatuor coefficientes indeterminati, (per *Prop.* 5.) quorum duo determinantur faciendo $v=0$, & $x=AD$ ad punctum D, atque reliqui duo determinantur faciendo $v=$ datæ longitudini ABC, & $x=FC$ ad punctum C.

COROLL. I.

Si curva v non ingreditur valorem ordinatæ P, exiſtente $S=0$, erit $\dot{R}\dot{y}-R\ddot{y}=0$. Qua æquatione comparata cum fluxione $n:2$. *Schol.*

Schol. Prop. 6. invenietur $\frac{R}{\dot{y}} = \frac{a}{\dot{z}}$. Ubi pro $\ddot{y}$ ſcripto ipſius valore $\frac{\dot{z}^2\ddot{x}}{\dot{v}^3}$, fiet R $\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}} = a$. Sed eſt $\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}$ æquale radio curvaturæ (per *Prop.* 15. *Ex.* 4.) quare in hoc caſu eſt radius curvaturæ æqualis $\frac{a}{R}$.

COROLL. II.

Iiſdem poſitis, ſi in expreſſione ordinatæ P deſit etiam z, erit $R\dot{x} = \dot{P}$, quo pacto fiet $\frac{\dot{P}\dot{v}^3}{\dot{z}\dot{x}\ddot{x}} = a$. Vice $\dot{x}\ddot{x}$ ſcribe ipſius valorem $\dot{v}\ddot{v}$, atque hinc fiet $\dot{P} = \dot{z}a\ddot{v}\dot{v}^{-2}$. Unde capiendo fluentes erit $P = b - \frac{a\dot{z}}{\dot{v}}$. Quo pacto in hoc caſu revocatur Problema ad fluxiones primas.

Solvi etiam poteſt per quadraturam curvarum. Nam in valore ipſius P nulla involvitur variabilis niſi x. Eſt ergò $a\dot{z} = b\dot{v} - P\dot{v}$, adeoque $a^2\dot{z}^2 = \overline{b-P}|^2\, \dot{v}^2 = \overline{b-P}|^2 \times \overline{\dot{z}^2 + \dot{x}^2}$, hoc eſt

$$\dot{z}\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2} = \overline{b-P} \times \dot{x}, \text{ ſeu } \dot{z} = \frac{\overline{b-P} \times \dot{x}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}:$$

Etiam $\dot{v} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$. Ergo quadrando curvas quarum abſciſſa communis eſt x, & ordinatæ ſunt $\frac{b-P}{\sqrt{a^2+2bP-P^2-b^2}}$

& $\frac{\dot{a}}{\sqrt{a^2+2bP-P^2-b^2}}$, dabuntur z & v.

C O R O L L. III.

Si in expreſſione ordinatæ P deſit x, exiſtente $R=0$, erit $\dot{S}yy+2S\dot{y}\dot{y}-Sy\ddot{y}=0$. Qua æquatione collata cum fluxione n : 3. *Schol. Prop.* 6. invenietur $S\frac{y^2}{\dot{y}}=\frac{a}{\dot{z}}$, hoc eſt (pro y & $\dot{y}$ ſcriptis ſuis valoribus $\frac{\dot{x}}{\dot{v}}$ atque $\frac{\dot{z}^2\ddot{x}}{\dot{v}^3}$) $S\frac{\dot{x}^2}{\dot{v}^2}\times\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\dddot{x}}=a$. Unde in hoc caſu erit radius curvaturæ $\left(=\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\dddot{x}}\right)$ æqualis $\frac{av^2}{S\dot{x}^2}$.

C O R O L L. IV.

Iiſdem poſitis, ſi præterea deſit z in expreſſione ipſius P ut ſit $\dot{P}=\dot{S}v$, erit $\frac{\dot{P}\dot{x}^2}{\dot{z}\ddot{x}}=a$, hoc eſt $\dot{P}=a\dot{z}\dddot{x}\dot{x}^{-2}$. Unde regrediendo ad fluentes fit $P=b-\frac{a\dot{z}}{\dot{x}}$. Adeoque etiam in hoc caſu revocatur Problema ad fluxiones primas.

Solvi etiam poteſt per quadraturam curvarum. Nam in hoc caſu in valorem ipſius P nulla ingreditur variabilis niſi v. Ergò eſt

$a\dot{z}=$

$a\dot{z} = b\dot{x} - P\dot{x}$, adeoque $a^2\dot{z}^2 = \overline{b-P}|^2 \times \dot{x}^2 = \overline{b-P}|^2 \times \overline{\dot{v}^2 - \dot{z}^2}$,

hoc eſt $\dot{z} = \dfrac{\overline{b-P} \times \dot{v}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$. Etiam $\dot{x} = \dfrac{a\dot{v}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$.

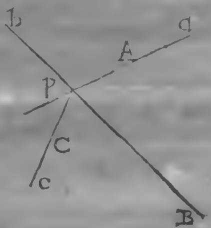
Itaque quadrando curvas, quarum abſciſſa communis eſt v, & ordinatæ ſunt $\dfrac{b-P}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$, & $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$, dabuntur z & x.

COROLL. V.

Et hinc vice verſa, data curva ABC, innoteſcit cujuſmodi factum ſit extremum in hac curva. Nam ſi quæritur ordinata bE quæ componatur ex dignitatibus ordinatæ BE, dabitur per æquationem $P = b - \dfrac{a\dot{z}}{\dot{v}}$, *(Cor. 2.)* Et ſi quæritur ordinata bE quæ componatur ex dignitatibus v, invenietur per æquationem $P = b - \dfrac{a\dot{z}}{\dot{x}}$ *(Cor. 4.)*

LEMMA V.

Si ſpatium rigidum a tribus potentiis in æquilibrio tenetur, lineæ directionum tranſibunt per idem punctum, & in eodem plano jacebunt.



Applicentur potentiæ ad puncta A, B, C, atque agant in directionibus Aa, Bb, Cc. Quoniam punctum quodvis

A tenetur in æquilibrio, vires Bb, Cc conjunctim sumptæ componunt vim vi Aa contrariam & æqualem. Sed (per Principia Statices) vires Bb, Cc hoc modo componi nequeunt, nisi transeat recta utraque Bb, Cc per punctum aliquod p in rectâ Aa, atque omnes Aa, Bb, Cc jaceant in plano communi. Ergò ita se res habet. *Q. E. D.*

LEMMA VI.

Si spatium materia gravi onustum a duobus filis sustinetur, respectu virium, quibus fila ista tenduntur, perinde est quonam modo disponatur materia in spatio isto; si modo Centrum Gravitatis semper versetur in eadem recta ad Horizontem normali.

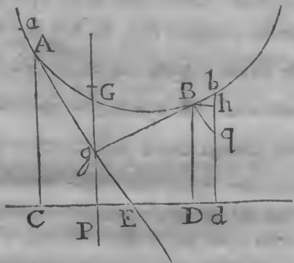
Constat ex Staticis.

N. B. In propositionibus quatuor sequentibus sumus acturi de figuris funiculorum, linteorum aquâ plenorum, atque fornicûm data onera sustinentium. Omnes hæ figuræ, utpote ex materia physica compositæ, veram habent crassitiem, sunt ad flexuram nonnihil ineptæ, & cedunt aliquantulum viribus, vel extendentibns vel comprimentibus. Ergò ad hæc omnia attendere oportet eum, qui velit has figuras accuratè describere. Sed cum ea ad computum mahematicum difficile revocentur, & calculum, per se satis prolixum, nimis impedirent, nos, eorum effectus prorsùs negligentes, fingimus figuras propositas constare ex materiâ perfectè flexili extentioni, atq; contractioni prorsùs inepta, atque adeo tenui, ut ejus crassities pœnè evanescat respectu longitudinis datæ. Respectu tamen sui ipsius non semper fingimus crassitiem esse absolute nullam, quoniam in funiculis, & in fornicibus propria tantùm pondera sustinentibus, ea ad figuras formandas plurimum valet.

PROP.

PROP. XVIII. PROB. XIII.

Datâ lege crassitudinis Funiculi dependentis a duobus punctis; invenire relationes fluxionum abscissæ, ordinatæ, & curvæ; & definite conditiones quibus figura describenda subjici potest.



Sit AB funiculi pars quædam dependens a punctis A & B, atq; ad rectam positione datam CD Horizonti parallelam ducantur normales AC, BD, & ad puncta A & B ducantur tangentes A*g*, B*g*, quarum A*g* occurrat ipsi CD in E, atque sint puncta *a* & *b* ipsis A & B proxima, & ductâ novâ ordinatâ *bd*, ei occurrat B*h* Horizonti parallela in *h*, atque B*q* tangenti A*g* parallela in *q*; atque sit AC ordinata positione data, & BD ordinata mobilis; & sint $CD = z$, $DB = y$, longitudo curvæ $AB = v$, crassitudo in $B = x$, pondus funiculi $AB = p$, $CE : CA : AE :: 1 : n : m$, atque *a* pondus datum æquale tensioni fili in A.

Quoniam pondus totius funiculi AB sustinetur a filis brevissimis *a*A, *b*B, in directionibus tangentium A*g*, B*g*, jacet totus funiculus in plano ad Horizontem normali; atque si partis AB centrum gravitatis sit G, per quod ducatur Horizonti normalis GP, transibit eadem GP per tangentium concursum mutuum *g*. Nam (per *Lemma* 5.) respectu filorum A*a*, B*b* perinde est, ac si omnis materia funiculi AB appendatur ad filum GP: unde spatio figuræ constituto in æquilibrio per tensiones trium filorum A*a*, B*b*, GP, transibunt ea per idem punctum g, atque jacebunt in eodem plano, (per *Lem.* 4.) quod ob normalem GP est Horizonti perpendicularis. Sunt ergò tensiones horum filorum, ut latera trianguli Bbq eorum directionibus parallela. Sed si fiat B$h = \dot{z}$, erit $hb = \dot{y}$, atque B$b = \dot{v}$, & (ob similia triangula Bbq, ECA,) $hq = n\dot{z}$, adeoque $bq = \dot{y} + n\dot{z}$, & B$q = m\dot{z}$. Quare est $a : p :: m\dot{z} : \dot{y} + n\dot{z}$, hoc est $a\dot{y} + na\dot{z} - mp\dot{z} = 0$. Est autem $\dot{p} = \dot{v}x$. Unde eliminato p ab æquatione hâc (nempe fluente uniformiter z) erit $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$. Itaque resolvendo æquationes $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$, & $\dot{v}\dot{v} = \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}$, (per *Prop.* 6.) dabuntur relationes ipsorum z, y, v; nam ex hypothesi datur x, vel per dignitates unius, vel duorum, vel omnium z, y, v.

CASUS I.

Si utrumque y & v ingrediuntur valorem ipsius x, describetur curva per tres conditiones, quæ possunt pro lubitu applicari ad valores y, & v, & fluxionum suarum (per *Prop.* 5.)

CASUS II.

Si desit y in valore x erunt conditiones omninò tres, quarum una ad minimum applicanda est ad valorem ipsius y, & reliquæ duæ possunt pro lubitu applicari ad valores ipsorum v & y, & fluxionum suarum.

CASUS III.

Si tantùm y ingreditur valorem ipsius x erunt etiam conditiones tres, applicandæ pro lubitu ad valores ipsorum v, y, & fluxionum suarum, modo ut una applicetur ad valorem ipsius v.

CASUS IV.

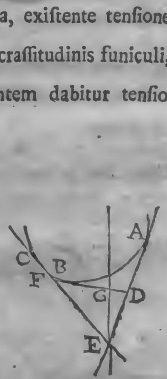
Denique si in valore ipsius x desit utrumque v & y, erunt conditiones tres, quarum una applicanda est ad valorem ipsius v, altera

tera ad valorem ipsius $\dot{y}$, & tertia pro lubitu applicari potest ad valores ipsorum v, y, & fluxionum suarum.

COROLL. I.

Per hanc solutionem, est tensio fili in B ad tensionem datam in A, ut Bb ad Bq, hoc est ut $\dot{v}$ ad $m\dot{z}$. Est ergo tensio in B ut $\frac{\dot{v}}{m\dot{z}}$, vel ob datum m, ut $\frac{\dot{v}}{\dot{z}}$: Sed per æquationem $a\dot{y} + na\dot{z} - mp\dot{z} = 0$, est $\dot{v}\ (= \sqrt{\dot{z}\dot{z} + \dot{y}\dot{y}}) = \frac{\dot{z}}{a} \times \sqrt{\genfrac{}{}{0pt}{}{n^2}{+1}a^2 - 2mnap + m^2p^2}$; atque est tensio in A æqualis a. Tensio itaque in B est $\sqrt{\frac{n^2+1}{m^2}a^2 \frac{-2n}{m}ap + p^2}$. Et cùm hæc tensio sit proportionalis ipsi $\frac{\dot{v}}{\dot{z}}$, ea erit minima quando est $\dot{v} = \dot{z}$, hoc est in curvæ puncto infimo ad quod tangens est Horizonti parallela, existente tensione istâ æquali $\frac{a}{m}$. Et hinc qualiscunque sit lex crassitudinis funiculi, datâ tensione in uno puncto A, ducendo tangentem dabitur tensio in alio quovis puncto B.

COROLL. II.



Quinetiam ducendo tangentes dividi potest funiculus in partes quarum pondera sint in datâ ratione. Sit enim ABC funiculus, & ad puncta tria A, B, C ducantur tangentes ADE, DBF, EFC sibi invicem occurrentes in D, E, & F, Tum (per hanc propositionem) centra gravitatis funiculorum AB, AC, BC, erunt in perpendicularibus transeuntibus per respectivos tangentium concursus mutuos D, E, & F. Proinde si per duarum tangentium AD, CF concursum E ducatur perpendicularis EG occurrens tangenti tertiæ DBF in G, erunt pondera partium AB, BC inter se in ratione reciprocâ distantiarum propriorum centrorum gravitatis a centro gravitatis totius funiculi ABC, hoc est pondus ipsius AB erit ad pondus ipsius BC in ratione reciprocâ DG ad GF. Datâ ergo ratione ponderum, dabitur ratio DG ad GF. Unde datis positione rectis DE, GE, FE, dabitur directio tangentis tertiæ DBF, per quam invenitur punctum B, quo dividitur funiculi ABC pondus in datâ ratione.

COROLL. III.

Si in expressione crassitudinis x insit tantùm unum ex ipsis z, y, v, solvetur Problema per quadraturam curvarum.

CASUS I.

Primo enim insit tantùm curva v in expressione crassitudinis x. Tum inito calculo per æquationes $a\dot{y} + na\dot{z} - mp\dot{z} = 0$, $\dot{v}\dot{v} = \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}$, & brevitatis causâ pro $\sqrt{n^2a^2 - 2mnap + m^2p^2 + 1}$ scripto R, invenietur $\dot{z} = \frac{a\dot{v}}{R}$, atque $\dot{y} = \frac{mp - na}{a}\dot{z} = \frac{mp - na}{R}\dot{v}$. Unde dato p per quadraturam curvæ cujus abscissa est v, & ordinata x, deinde dabuntur z & y, quadrando curvas, quarum abscissa communis est v, & ordinatæ sunt $\frac{a}{R}$, atq; $\frac{mp - na}{R}$.

CASUS II.

Si in expressione ipsius x insit tantùm z, ducto utroq; membro æquationis $\dot{z} = \frac{a\dot{v}}{R}$ in x, fiet $\dot{z}x = \frac{a\dot{p}}{R}$. Unde quadrando

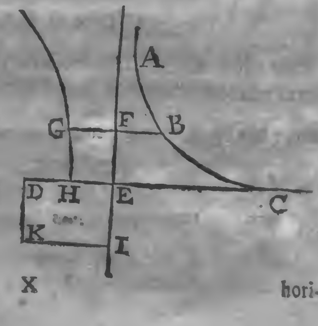
curvas,

curvas, quarum abscissæ sunt z & p, & quarum ordinatæ sunt x & $\frac{a}{R}$, dabitur relatio inter z & p. Deinde ob $\dot{v} = \frac{\dot{p}}{x}$, & $\dot{y} = \frac{\overline{mp - na}}{a}\dot{z}$; quadrando curvas quarum abscissæ sunt p & z, & ordinatæ sunt $\frac{1}{x}$ & $\frac{mp - na}{a}$, dabuntur v & y.

CASUS III.

Denique si in valore x [illegible] insit tantùm y, ducendo æquationem $\dot{y} = \frac{\overline{mp - na}}{R}\dot{v}$ in x, fiet $\dot{y}x = \frac{\overline{mp - na}}{R}\dot{p}\ (= \frac{\dot{R}}{m}.)$ Quare faciendo $\frac{R}{m}$ æquale areæ curvæ cujus abscissa est y, & ordinata x, dabitur relatio inter p & y. Unde deinde quadrando curvam cujus abscissa est y, & ordinata $\frac{a}{mp - na}$ dabitur z. Dabitur autem v, ut in casu secundo, quadrando curvam cujus abscissa est p, & ordinata $\frac{1}{x}$

COROLL. IV.



Per *Cas.* 3. *Cor.* 3. est $\frac{R}{m}$ æquale fluenti ipsius yx, quod idem æquale est tensioni fili, (per *Cor.* 1.) Ergo sit ABC funiculus, ad cujus punctum infimum C ducatur tangens CEHD horizonti parallela, & ad eum ducatur normalis EF; atque ductâ BFG hori-

horizonti parallela, in eâ sit semper FG $= x =$ crassitudini funiculi in B. Tum si sit GH curva, quam perpetuò tangit punctum G atque areæ GFEH terminatæ ad tangenten CE addatur area EDKI $= \frac{a}{m}$, erit area tota IKDHGFEI semper æqualis tensioni fili in B.

Nam est EF $= y$, adeoque fluxio areæ est $\dot{y}x =$ fluxioni tensionis, quæ in puncto C æqualis est $\frac{a}{m}$.

COROLL. V.

Per *Ex.* 4. *Prop.* 15. est radius curvaturæ æqualis $\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{y}}$; quare (per æquationem $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$.) in funiculo est radius iste æqualis $\frac{a\dot{v}^2}{mx\dot{z}^2}$; hoc est, æqualis areæ DI (fig. *Cor*. 4.) applicatæ ad FG, & deinde ductæ in $\frac{\dot{v}^2}{\dot{z}^2}$, hoc est in quadratum secantis anguli, quem facit curva cum horizonte.

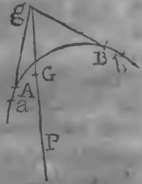
COROLL. VI.

Datâ figurâ funiculi facile invenitur ratio crassitudinis suæ. Nam dantur relationes fluxionum per speciem figuræ: unde per æquationem in hoc Problemate inventam $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$, datur crassitudo $x = \frac{a\ddot{y}}{m\dot{v}\dot{z}} = \frac{a\dot{v}^2}{m\dot{z}^2} \times \frac{\dot{z}\ddot{y}}{\dot{v}^3} = \frac{a\dot{v}^2}{m\dot{z}^2}$ applicato ad radium curvaturæ.

PROP.

PROP. XIX. PROB. XIV.

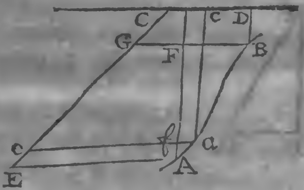
Datâ ratione crassitudinis, invenire figuram Fornicis proprium pondus sustinentis.



Sit fornicis portio quædam AB, & sint *a* & *b* puncta ipsis A & B proxima, & ducantur tangentes Ag, Bg. Tum si portionis AB centrum gravitatis sit G, per id ducta horizonti perpendicularis GP transibit per tangentium concursum g, (per *Lem.* 5. & 6.) quoniam sustinetur pondus arcus AB per lineolas *a*A, *b*B. Viribus itaque eodem modo interpretatis, atq; in Propositione præcedenti, constat figuram hujusmodi fornicis, eandem esse atq; funiculi, in situ tamen inverso.

LEMMA VII.

Sit AB linea quævis curva in plano ad horizontem perpendiculari, & per motum rectæ eidem plano normalis per curvam AB describetur superficies, per quam sustineatur fluidum cujus superficies Horizonti parallela occurrat plano eidem in rectâ CD. Tum dico,



Quod si ad Horizontem ducantur perpendiculares CA, DB, occurrentes curvæ in A & B, & recta CD in C & D, & ducantur Horizonti parallelæ AE, BFG, quarum BF

occurrat

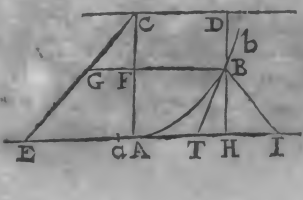
occurrat rectæ CA in F, & fiat AE = CA, atque ducatur CE occurrens BF in G, erit fluidi pressio tota lateralis, per quam urget fundum AB in directione Horizonti parallela, ad pondus fluidi spatio CABD inclusi, ut area AEGF, ad aream CABD.

Duc *ca* horizonti perpendicularem, ipsi CA proximam, atque occurrentem curvæ AB & rectæ CD in *a* & *c*, atq; per *a* duc *ae* horizonti parallelam, occurrentem ipsis CA, CE in *f* & *e*. Tum coincidentibus punctis A & *a*, fluidi spatio CA*ac* inclusi pondere existente ut idem spatium, hoc est ut CA × *fa*, ejus pressio absoluta in lineolam A*a* perpendiculariter facta erit ut CA × A*a*; adeoque ejusdem pressionis pars lateralis horizonti parallela in directione *fa* erit ut CA × *f*A, hoc est ut EA × *f*A. Existente igitur CA*ac* fluxione ponderis, erit EA*fe* fluxio pressionis lateralis; adeoq; ubi pondus sit æquale areæ CABD, pressio lateralis fiet æqualis areæ AEGF. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc si constituatur triangulum rectangulum PQR, cujus basis PQ horizonti parallela sit ad perpendicularem RP, ut spatium AEGF ad spatium ACDB, fluidi vis tota absoluta in fundum AB erit in directione hypothenusæ RQ, & per eam repræsentabitur, si repræsentetur pondus per perpendicularem RP.

PROP. XX. PROB. XV.



Invenire figuram Lintei aqua pleni.

Repræsentetur Lintei portio quædam per curvam AB, &

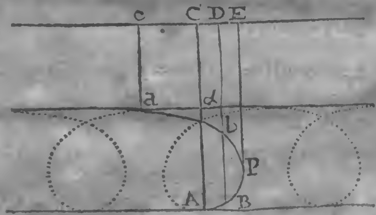
& aquæ ſuperficies horizonti parallela per rectam horizonti parallelam CD. Tangant linteum rectæ duæ EATHI, BT in A & B, ſibi mutuo occurrentes in T, quarum AT ſit horizonti parallela, & per puncta A & B ducantur ipſis CD, AT normales, iis occurrentes in C, D, & H, & in AT ſit AE = AC, & ductâ CE, ei occurrat BG horizonti parallela in G, atq; ipſi CA in F.

Jam ſi in AT ſumatur HI ad HB, ut eſt ſpatium AEGF ad aream ACDB, erit hypothenuſa BI parallela directioni totius vis abſolutæ preſſionis fluidi in fundum AB (per *Lem.* 7.) Sed huic vi reſiſtitur per tenſiones filorum A*a*, B*b*, in directionibus tangentium AT, BT: quare (per *Lem.* 5.) vis abſoluta preſſionis fluidi in fundum AB æquipollet vi applicatæ ad punctum T in directione rectæ BI. Tenſiones ergò filorum A*a*, B*b*, & vis preſſionis fluidi in fundum AB, ſunt inter ſe ut rectæ earum directionibus parallelæ TI, TB, BI; ſimul exiſtentibus pondere fluidi in ſpatio CABD, & preſſione laterali in fundum AB ut BH & HI. Sed ob liquoris fluiditatem, liberè movebitur linteum per ejus particulas, tanquam per trochleas; adeoque eſt tenſio fili B*b* æqualis tenſioni fili A*a*, & inde TB = TI. Ergò ſi tenſio fili data deſignetur per datum ſpatium *a*, atque pondus fluidi per ſpatium continens ACDB, quod etiam dicetur A, & preſſio lateralis per ſpatium ei proportionale AEGF, quod dicetur B, erit $a : A : B :: TB : BH : HI$. Eſt autem $BH = \sqrt{2TB \times HI - HIq}$; (ob TI=TB) quare etiam per hanc analogiam erit $A = \sqrt{2aB - BB}$.

Sit jam $CA = c$, $AH = z$, $DB = y$ (= CF = FG.) Tum erit $B = \frac{c^2 - y^2}{2}$, atque $TH : HB :: \dot{z} : \dot{y}$, hoc eſt, (per analogiam ſupra inventam, & per valorem ipſius A) $a - B : \sqrt{2aB - BB} :: \dot{z} : \dot{y}$: Unde fit $\dot{z} = \frac{\overline{B - a} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$ quippe ratione habitâ ſignorum ipſorum $\dot{z}$ & $\dot{y}$. Nam ubi curva eſt verſus terram convexa, creſcente z, decreſcit y, atque eſt $B = \frac{cc - y^2}{2}$: Sed ubi curva eſt ad terram concava, ipſorum z & y fluxiones ſunt ejuſdem ſigni, exiſtente etiam $B = \frac{yy - cc}{2}$. Ipſius autem z fluxio eſt ejuſdem formæ in utroque caſu, ſigno tantùm mutato. In caſu figuræ præſentis fluidum verè continetur in linteo: in caſu altero jacet ad lintei partes inferiores, idque (puta mediante ſyphone) ſurſum urget cum vi in quovis puncto proportionali fluidi altitudini perpendiculari infra altiſſimam ſuperficiem horizontalem.

Datur autem z ex dato y, quadrando curvam cujus abſciſſa eſt y, atq; ordinata $\frac{B - a}{\sqrt{2aB - BB}}$. Et per coefficientem indeterminatum in valore fluentis z, & per coefficientes duos a & c accommodari poteſt ſolutio ad tres conditiones, quarum ad minimum una reſpectum habebit ad valorem ipſius z; per quem nempe determinatur poſitio curvæ.

Per æquationem $\dot{z} = \frac{\overline{B - a} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$ $(= \frac{B - a}{A}\dot{y},)$ eſt $\frac{\dot{z}}{\dot{y}} = 0$;



hoc eſt, ordinata y tangit curvam, quando eſt $B = a$, i. e. $\frac{cc - yy}{2} = a$,

vel

vel $y = \sqrt{cc - 2a}$. Et in hoc caſu eſt area $A = a$. Item ubi $A = 0$, erit $\dot{z}$ infinita reſpectu y, hoc eſt curva tanget rectam horizonti parallelam. Et hoc fit ubi eſt $2aB - BB = 0$, id eſt, vel quando $B = 0$, adeoque $y = c$, vel quando $B = 2a$, adeoq; $y = \sqrt{cc - 4a}$. Ergò ſi ſit CD fluidi ſuperficies horizontalis, atque ad horizontem ducatur normalis CA, & in eâ ſumantur $CA = c$, & $C\alpha = \sqrt{cc - 4a}$, & per puncta A & α ducantur AI & $\alpha\iota$ horizonti parallelæ, curva deſcripta utraſque tanget, & inter eas tota jacebit. Idque fiet ſub hâc conditione, ut ordinata DB primùm pergendo de CA per DB perveniat in EP, ubi ſit $EP = \sqrt{cc - 2a}$, atque area $CABPE = a$; deinde regrediendo de EP per $D\dot{b}$ perveniat in $c\alpha$, ubi ſit $c\alpha = \sqrt{cc - 4a}$, atque area $EP\dot{b}ac = a$. Nam progrediente ordinatâ area increſcit, & regrediente ordinatâ decreſcit: quare ſi area ſit nihil, hoc eſt indicium, vel ordinatam de loco ſuo nondum moviſſe, vel quod areæ decrementum per regreſſionem ordinatæ æquale ſit ejuſdem incremento prius facto per progreſſionem ordinatæ. Et hinc per infinitas repetitiones figuræ $APBba$ utrinque factas curva ſerpet perpetuò inter horizonti parallelas AI, $\alpha\iota$ ad inſtar cycloidis, ubi punctum deſcribens ſumitur ultra peripheriam rotæ.

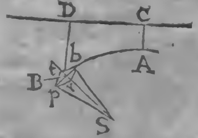
In hâc curvâ eſt radius curvaturæ æqualis ipſi $\frac{a}{y}$. Quod mox demonſtrabimus in propoſitione ſequenti.

PROP. XXI. PROB. XVI.

Invenire figuram Fornicis ſuſtinentis onus fluidi ſuperincumbentis.

In hâc figurâ vires omninò interpretantur ut in *Prop.* 20. Quare eſt hujus fornicis figura eadem, atque figura lintei, onere tantùm ad contrarias partes figurarum applicato; in hâc enim applicatur fluidum ad curvæ partes convexas, in illâ ad partes concavas.

Sed



Sed ut per varias solutiones res quodammodo fiat illustrior, repræsentetur fornicis portio quædam per curvam AB; vertice summo ubi tangens est horizonti parallela, existente A. Repræsentetur etiam fluidi superficies summa per rectam horizonti parallelam CD, & ductis horizonti normalibus AC, BD, sint AC $= c$, CD $= z$, DB $= y$, atque curva AB $= v$, & pro area CABD scribatur A. Sume puncta b & p utrinque ad distantias æquales minimas a puncto B, & ducatur ad curvam normales bS, pS concurrentes in S, atque ducantur tangentes bt, pt concurrentes in t, & compleatur parallelogrammum $btpr$.

Constat puncta b & p versus invicem urgeri per vires duas in directionibus tangentium bt & pt; his autem viribus resisti per pondus fluidi insistentis fundo bp, idque in directione ad fundum perpendiculari. Sunt ergo vires illæ ut latera trianguli btr earum directionibus parallela, vel ut latera trianguli consimilis Sbp. Sed punctum b sustinet pondus totius fluidi in areâ CABD, cujus pressio in directione bt est ad ejusdem pressionem perpendicularem ut secans anguli bBD ad radium, hoc est ut $\dot{v}$ ad $\dot{y}$: item pressio in fundum bp est ad pondus fluidi in spatio ACDB ut $bp \times y$ ad A. Quare conjunctis his rationibus fit $bp \times y\dot{y}$ ad A$\dot{v}$ ut bp ad bS; adeoq; bS $= \dfrac{A\dot{v}}{y\dot{y}}$. Sed datâ $\dot{v}$ est bS $= \dfrac{\dot{v}\dot{z}}{\ddot{y}}$ (per *Ex.* 4. *Prop.* 15) Unde fit $\dfrac{\dot{v}\dot{z}}{\ddot{y}} = \dfrac{A\dot{v}}{y\dot{y}}$, hoc est $\dot{z}y\dot{y} = A\ddot{y}$, vel $\dot{A}\dot{y} - A\ddot{y} = 0$. Unde capiendo fluentes fit $\dfrac{A}{\dot{y}} = \dfrac{a}{\dot{v}}$, hoc est $A\dot{v} = a\dot{y}$. Est autem $\dot{v}\dot{v} =$

$\dot{z}\dot{z} +$

$\dot{z}z + \dot{y}y$, unde fit $\dot{y} = \frac{A\dot{z}}{\sqrt{a^2 - A^2}}$; hoc est $\dot{y}y = \frac{A\dot{A}}{\sqrt{a^2 - A^2}}$. Unde (capiendo fluentes, & addendo $a + \frac{cc}{2}$, ut fiat $y = c$ in vertice curvæ, ubi est $A = o$,) fit $\frac{y^2}{2} = a + \frac{c^2}{2} - \sqrt{a^2 - A^2}$. Pro $\frac{y^2 - c^2}{2}$ scribe B, atque calculo peracto invenietur $A = \sqrt{2aB - B^2}$; adeoque $\dot{z} = \frac{\overline{a - B} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$, omninò ut in *Prop.* 20.

COROLLARIUM.

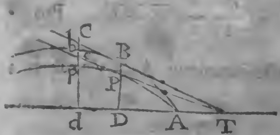
In hâc solutione inveniebatur $\frac{A}{\dot{y}} = \frac{a}{\dot{v}}$, atque erat $bS = \frac{A\dot{v}}{\dot{y}y}$. Est ergò pressio $\frac{A\dot{v}}{\dot{y}}$ facta in lineolam bB æqualis datæ a, atque radius curvaturæ $bS = \frac{a}{y}$.

SCHOLIUM.

Ex hâc expressione radii curvaturæ constat eandem hanc curvam etiam esse figuram laminæ elasticæ datâ vi flexæ. Nam est flexura in ratione reciprocâ radii curvaturæ, adeoque in hac curva in directa ratione altitudinis y. Sed dati ponderis vis ad laminam incurvandam est ut ejusdem distantia minima a puncto flexuræ. Quare si pondus applicetur ad laminam in recta CD, figura genita ea erit quam hic descripsimus.

Quinetiam manentibus punctis, in quibus hæc curva occurrit fluidi superficiei horizontali CD, si minuatur altitudo maxima c in infinitum, erit hæc eadem curva cujus figuram induit Nervus musicus vibrans, in quovis articulo motûs sui. Quod jam demonstrare properamus.

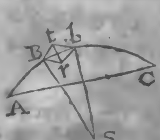
LEMMA VIII.



Si curvarum duarum AB, AP abscissam communem habentium AD, ordinatæ DB, DP sint ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum, ut curvæ tandem coincidant cum axe AD, erit ultima ratio flexuræ eadem, quæ ordinatarum.

Duc novam ordinatam dp curvis occurrentem in p & b, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes dp in C & c. Tum ob datam rationem ordinatarum, tangentes productæ concurrent in aliquo puncto T in axe AD. Unde ob parallelas db, DB, erit $dC : dc :: DB : DP :: db : dp :: dC - db : dc - dp$, hoc est $bC : pc :: DB : DP$. Coincidant jam ordinatæ db, DB, atque lineolæ evanescentes bC, pc erunt subtensæ angulorum contactus bBC, pPc; atque imminutis ordinatis in infinitum erunt angulis ipsis proportionales. Sed per hos angulos æstimatur flexura. Quare coincidentibus curvis AB, AP cum axe AD, erit flexura in B ad flexuram in P ut ordinata DB ad ordinatam DP. *Q. E. D.*

LEMMA IX.



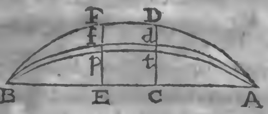
Datâ crassitudine nervi tensi, vis acceleratrix cujusvis puncti est ut flexura in isto puncto.

Sit nervus in positione curvæ ABC. Sume punctum b puncto B proximum, & duc tangentes Bt, bt concurrentes

tes in t, & compleatur parallelogrammum $Btbr$, atque ad curvam ducantur normales BS, bS concurrentes in S. Tum (per principia Statices) erit vis absoluta ad movendam particulam Bb in directione tr ad fili tensionem in B, vel in b, per quam generatur vis illa, ut tr ad tB, hoc est ut Bb ad BS, adeoque vis illa est ut $\frac{Bb}{BS}$; quoniam fili tensio est data. Sed est vis acceleratrix in ratione vis absolutæ directè & materiæ movendæ inverse; & in hoc casu est materia movenda ut Bb. Quare est vis acceleratrix ut $\frac{1}{BS}$, hoc est ut curvatura in B; curvatura enim est in ratione reciprocâ radii.

PROP. XXII. PROB. XVII.

Definire motum Nervi tensi.



In his pono nervum constare ex materiâ tenuissimâ uniformiter crassâ, ejusq; elongationem maximam ab axe motus AB esse infinitè parvam; ita ut vis tensionis non mutetur per auctam longitudinem nervi in majoribus suis distantiis ab axe AB, & ut inclinatio radiorum curvaturæ ad axem sit semper insensibilis.

SOLUTIO.

Per puncta A & B describetur curva ADFB, cujus indoles sit, ut, ductis ad libitum ordinatis ad axem normalibus CD, EF, sit curvatura in D ad curvaturam in F, ut DC ad FE. Dico quod hæc sit figura, quam induit nervus in quovis articulo motus sui; item quod puncta omnia D, F simul ad axem pervenientia & simul redeuntia vibrationes suas omnes peragent in eodem tempore periodico, ad instar penduli oscillantis in Cycloide. *Q. E. F.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit enim curva ADFB nervi diſtantia maxima ab axe AB, punctis omnibus jam quieſcentibus. Tum quoniam curvatura in D eſt ad curvaturam in F ut diſtantia CD ad diſtantiam EF (ex hypotheſi) erit acceleratio in D ad accelerationem in F in eadem ratione diſtantiarum (per *Lem.* 9.) adeoq; in initio motus ſpatia ſimul percurſa D*d*, F*f* erunt in eadem ratione: adeoq; & diviſim ſpatia percurrenda C*d*, E*f* erunt in eadem ratione: unde etiam accelerationes novæ in punctis *d*, & *f* erunt in eadem ratione (per *Lem.* 8, & 9.) atq; erunt ad accelerationes priores in D & F, ut diſtantiæ *d*C & *f*E ad diſtantias DC & FE (per eadem *Lemm.*) Ergò puncti cujuſvis D, vel ut in eadem curva ADFB, vel ut in diverſis ADFB & A*df*B ſpectati, acceleratio ſemper eſt ut ejuſdem diſtantia ab axe motus AB. Quare (per *Prop.* 51. *Lib.* 1. *Phil. Nat. Princ. Math.*) puncta omnia Nervi ad axem ſimul perveniunt, ſimul redeunt, & vibrationes ſingulas peragunt in dato tempore periodico, ad inſtar corporis in Cycloide oſcillantis. *Q. E. D.*

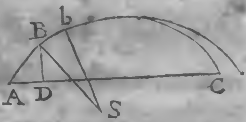
Porrò ſi Nervus plectro modò percuſſus nondum induerit formam curvæ jam deſcriptæ; ſit ejus forma ADFB, curvatura in F exiſtente ad curvaturam in D in majori ratione quam diſtantiæ FE ad diſtantiam DC. In hoc caſu velocitas in F eſt ad velocitatem in D, vel in majori, vel in minori ratione, quam diſtantia FE ad diſtantiam DC. Si ſit velocitas in F ad velocitatem in D in ratione majore quam FE ad DC, erit ſpatium F*f* in tempore minimo deſcriptum ad ſpatium D*d* eodem tempore deſcriptum in ratione majore quam FF ad CD; adeoque diviſim erit *f*E minor reſpectu FE, quam eſt *d*C reſpectu DC, indeque (per *Lemm.* præd.) acceleratio in *f* minor erit reſpectu accelerationis in F, quam eſt acceleratio in *d* reſpectu accelerationis in D. Itaque majoris velocitatis acceleratione ſemper decreſcente, & minoris velocitatis acceleratione è contra ſemper creſcente (reſpectu diſtantiarum ab axe AB,) motus inter ſe tandem ita temperabuntur, ut perventis punctis F & D in puncta quædam *p* & *t*, erunt tum velocitates tum accelerationes ut diſtantiæ *p*E, *t*C; adeoque curva A*tp*B jam exiſtente eadem quam deſcripſimus, motus

dehinc

dehinc omnes conspirent. Atque idem eveniet si sit velocitas in F ad velocitatem in D in minore ratione quam distantiæ FE ad distantiam DC. Quare quocunque modo percutiatur nervus, quam citissime induet formam curvæ hic descriptæ, atque perget moveri more jam descripto. *Q. E. D.*

PROP. XXIII. PROB. XVIII.

Datis longitudine Nervi, ejusdem pondere, & pondere tendente, invenire tempus periodicum.

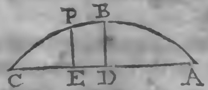


Sit Nervi inter puncta A & C extensi longitudo L, ejusdem pondus N, atq; pondus tendens P, & constituatur nervus in positione ABC; & sumptis punctis B & b proximis, ducantur ad curvam normales BS, bS, concurrentes in S; & ducatur ordinata axi normalis BD.

Per *Lem. 9.* est vis tensionis Nervi ad vim absolutam ad movendam particulam Bb ut BS ad Bb. Sed est vis acceleratrix in ratione compositâ vis absolutæ directe & materiæ movendæ inverse. Quare si particulæ movendæ Bb pondus dicatur p, erit acceleratio particulæ Bb ad accelerationem ponderis P ab ipsius propriâ gravitate oriundam, hoc est, vis acceleratrix nervi ad movendum punctum B ad vim acceleratricem gravitatis, ut $\frac{Bb}{p}$ ad $\frac{BS}{P}$; unde si gravitatis acceleratio data dicatur 1, erit puncti B acceleratio $\frac{Bb \times P}{BS \times p}$. Sed est P ad p in ratione compositâ P ad N, & N ad p, seu L ad Bb, unde fit $\frac{P}{p} = \frac{P \times L}{N \times Bb}$. Adeoq; acceleratio puncti B est $\frac{P \times L}{N \times BS}$. Sed

quoniam

quoniam eſt curvatura ut diſtantia BD (per *Prop.* 22.) quæ eadem eſt ut $\frac{1}{BS}$, erit $BS \times BD$ quantitas data. Sit illa a. Tum pro BS ſubſtituto $\frac{a}{BD}$, fiet acceleratio puncti B æqualis $\frac{P \times L \times BD}{N \times a}$. Sed in funipendulis tempora periodica ſunt in dimidiatâ ratione longitudinum directe, & virium acceleratricium inverſè (per *Prop.* 52. *Lib.* 1. *Princip. Math.*) Quare ſi conſtituatur pendulum cujuſvis longitudinis D, erit tempus periodicum nervi ad tempus periodicum iſtius penduli in dimidiatâ ratione (BD applicatæ ad $\frac{P \times L \times BD}{N \times a}$, hoc eſt) $\frac{N \times a}{P \times L}$ ad D. Atque numerus vibrationum nervi in tempore unius vibrationis penduli erit $\frac{D^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}$.



Supereſt ut inveniamus quantitatem a. Conſtituatur itaque nervus in poſitione ABPC, & ad axis AC punctum medium D erigatur ordinata normalis DB, & ſit alia quævis ordinata EP, atq; ſint DB = c, DE = z, EP = y. Tum, ob radium curvatura æqualem $\frac{a}{y}$, erit (per *Prop.* 21.) $\dot{z} = \frac{\overline{B-a} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$, nempe pro B ſumpto $\frac{cc - yy}{2}$. Sed evaneſcentibus c & y hæc expreſſio fit $\dot{z} = \frac{-a\dot{y}}{\sqrt{ac^2 - ay^2}}$, $= \frac{-a^{\frac{1}{2}}\dot{y}}{\sqrt{cc - yy}}$, vel $\dot{z} = \frac{-a^{\frac{1}{2}}}{c} \times \frac{c\dot{y}}{\sqrt{cc - yy}}$. At enim eſt $\frac{c\dot{y}}{\sqrt{c^2 - y^2}}$ fluxio arcus circularis, cujus ſinus eſt y, & radius c. Quare arcu quadrantali

drantali in isto circulo existente q, erit $DC = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{c} \times q = \frac{1}{2} L$. Unde est $a^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{2} L$ ut radius circuli ad arcum quadrantalem, vel $a^{\frac{1}{2}}$ ad L ut diameter circuli ad peripheriam ejusdem. Sit ergò p peripheria circuli cujus diameter est 1, atque jam existente $a^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{p}$: erit numerus vibrationum Nervi, in tempore unius vibrationis penduli datæ longitudinis D, æqualis $\frac{D^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} p}{L^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}}$. *Q. E. I.*

COROLL. I.

Comparatis motibus Nervorum inter se, ob data p & D, erit tempus periodicum Nervi ut $\frac{L^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}}}$.

COROLL. II.

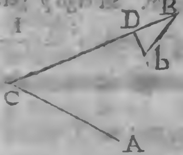
Ubi Nervi constituuntur ex eodem filo, est Nervi pondus N ut ejusdem longitudo L. Quare in comparandis motibus hujusmodi Nervorum, est Tempus periodicum ut $\frac{L}{P^{\frac{1}{2}}}$.

COROLL. III.

Iisdem positis, si præterea detur pondus P, hoc est, si longitudines sumantur in eodem Nervo diversimode obturato, erit Tempus periodicum ut L. Sed respectu Nervi aperti, pars dimidia edit sonum Diapason, pars $\frac{2}{3}$ edit sonum Diapente, pars $\frac{3}{4}$ edit sonum Diatessaron, & sic de cæteris. Quare a Musicis recte definiuntur proportiones hujusmodi tonorum per numeros, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. longitudinibus Nervorum proportionales.

LEM-

LEMMA X.



Si in punctum datum spatii rigidi circa datum axem mobilis, impingat data particula in datâ directione, data cum velocitate; atq; in figura præsenti sint puncta C, B, b, A intersectiones plani ad axem datum rotationis perpendicularis, cum ipso axe & cum rectis ei parallelis, transeuntibus per locum puncti in quod impingit particula data, per extremitatem rectæ in directione motus, & proportionalis velocitati istius particulæ impingentis; & per spatii ejusdem aliud punctum datum: atq; ad CB ducatur normalis bD: tum erit motus istius spatii productus per impulsum istius particulæ omninò idem, ac si produceretur per aliam particulam, cujus magnitudo est ad magnitudinem particulæ prioris, ut CB^2 ad CA^2, & velocitas est ut $Db \times \frac{CA}{CB}$, impingentem in istud aliud punctum datum cujus projectio est A, cum directione tum rectæ CA tum Axi rotationis perpendiculari.

Nam per rigorem spatii omnis motus tollitur, nisi quatenus fit in planis ad axem normalibus. Quare punctis omnibus de quo agitur modo prædicto ad tale planum reductis, particulæ impingentis velocitas & ejusdem directio in hoc plano repræsentabitur per rectam B*b*. Sed hujus velocitatis pars BD tollitur per resistentiam puncti C, & per partem reliquam D*b* producitur motus spatii. Velocitas autem puncti A est ad velocitatem puncti B, ut distantia a centro CA ad distantiam CB: quare puncti A velocitas producta per motum particulæ impingentis in B erit $Db \times \frac{CA}{CB}$. Sed & momentum

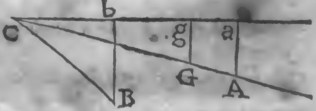
ejusdem

ejuſdem particulæ eſt ad momentum quod tribuit puncto A, ut CA ad CB: quare ſi particulæ iſtius magnitudo ſit p, ejus momento in B exiſtente $p \times Db$, momentum ab eâ tributum puncto A erit $p \times Db \times \frac{CB}{CA}$. Sed eadem velocitas & idem momentum producuntur in puncto A per vim particulæ $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingentis in illud punctum, in directione ipſi CA perpendiculari cum velocitate $Db \times \frac{CA}{CB}$. Quare reſpectu motus producti in ſpatio rigido, perinde omninò eſt ſive particula p impingat in B, ſive particula $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingat in A modo jam definito. *Q. E. D.*

PROP. XXIV. PROB. XIX.

Corporis dati e dato Axe Horizonti parallelo dependentis invenire Centrum Oſcillationis.

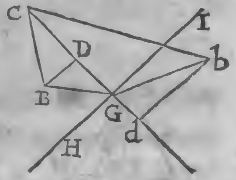
Per Centrum Oſcillationis intelligo punctum, cujus velocitas idem ſemper eſt ac ſi corpore reliquo amoto illud ſolum circa eundem axem oſcilletur.



Sit ergò præſens figura in plano ad horizontem & ad Axem oſcillationis perpendiculari, tranſeunte per corporis centrum gravitatis G, atque ſit C interſectio hujus plani cum Axe oſcillationis. Duc Horizonti parallelam Cg, atque in rectâ CG ſit A Centrum oſcillationis quæſitum. Sit p particula priſmatica Axi motus parallela, & plano figuræ inſiſtens in puncto B. Duc CB, & ad rectam Cg duc perpendiculares Bb, Gg, Aa, ei occurrentes in b, g, a.

Si gravitatis acceleratio data ſit 1, tum particulæ p acceleratio, ad ſpatium figuræ movendum circa punctum C, erit $\frac{Cb}{CB}$. Quare puncti A momentum a vi particulæ p oriundum erit $(p \times \frac{Cb}{CB} \times \frac{CB}{CA} =)$ $p \times \frac{Cb}{CA}$. Sed (per *Lem.* 10.) motus puncti A per particulam p in puncto B productus perinde omninò eſt, ac ſi produceretur a particulâ $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingente in ipſum punctum A. Quare vice particularum p in locis B, ſubſtitutis novis particulis $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ in puncto A, dabitur acceleratio puncti A, oriunda ex conjunctis viribus totius Corporis dati, per notiſſimam regulam Colliſionum; nempe applicando ſummam omnium momentorum $p \times \frac{Cb}{CA}$ ad ſummam omnium particularum ſubſtitutarum $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$, hoc eſt (ob datum CA) applicando ſummam omnium $p \times Cb \times CA$ ad ſummam omnium $p \times CB^2$: Sed ex notiſſimâ proprietate centri gravitatis, ſi magnitudo corporis totius dati ſit P, erit ſumma omnium $p \times Cb$ æqualis $P \times Cg$. Quare ſi pro ſummâ omnium $p \times CB^2$ ſcribatur Q, erit acceleratio puncti A æqualis $\frac{P \times Cg \times CA}{Q}$. Sed, ex hypotheſi, eſt hæc acceleratio æqualis ipſius puncti A accelerationi propriæ $\frac{Ca}{CA}$ vel $\frac{Cg}{CG}$. Eſt ergò $CA = \frac{Q}{P \times CG}$. Inventâ itaque ſummâ omnium particularum corporis propoſiti ductarum in quadrata ſuarum diſtantiarum minimarum ab Axe oſcillationis, per Fluxionum Methodum inverſam, dabitur diſtantia centri oſcillationis ab Axe, applicando hanc ſummam ad productum corporis dati ducti in diſtantiam centri gravitatis ab Axe oſcillationis. *Q. E. I.*

COROLL. I.



In eodem plano exiſtentibus punctis C, G, B iiſdem ac ſupra, ad CG duc normales HGI, BD. Tum erit $CB^2 = BG^2 + CG^2 - 2CG \times GD$; nempe cadente puncto B ad eaſdem partes rectæ HI atque punctum C. Sed ubi cadit punctum b ad contrarias partes rectæ HI, erit $CB^2 = bG^2 + CG^2 + 2CG \times Gd$. Eſt ergò ſumma omnium particularum ductarum in propria ſua CB^2 per totam figuram, æqualis ſummæ omnium particularum ductarum in propria $\overline{BG^2 + CG^2}$ per totam figuram, minus ſummâ omnium $p \times 2CG \times GD$ ex unâ parte rectæ HI, plus ſummâ omnium $p \times 2CG \times Gd$ ex alterâ parte HI. Sed quoniam datur 2CG ex naturâ centri gravitatis eſt ſumma omnium $p \times 2CG \times Gd$ æqualis ſummæ omnium $p \times 2CG \times GD$. Quare eſt ſumma omnium $p \times CB^2$, ſeu Q, æqualis ſummæ omnium $p \times GB^2 + p \times CG^2$, hoc eſt, (ob datum CG^2) æqualis $P \times CG^2$ plus ſumma omnium $p \times GB^2$. Si ergò pro ſumma omnium $p \times GB^2$ ſcribatur D, erit $Q = P \times CG^2 + D$; adeoq;

$$CA \left(= \frac{Q}{P \times CG}\right) = CG + \frac{D}{P \times CG}.$$

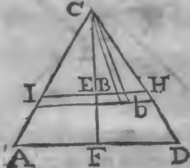
COROLL. II.

Hinc eſt $GA = \frac{D}{P \times CG}$. Unde data directione Axis Oſcillationis reſpectu figuræ corporis propoſiti, dabitur productum $CG \times GA$ $\left(= \frac{D}{P}.\right)$ Adeoque dato centro oſcillationis in uno caſu ejuſdem directionis Axis, dabitur idem in omnibus aliis, abſque ulteriori calculo.

In

In casu aliquo proposito calculus institui potest, vel per inventionem ipsius Q ex commoda assumptione puncti C, vel per inventionem ipsius D, prout commodius videbitur.

EXEMP. I.

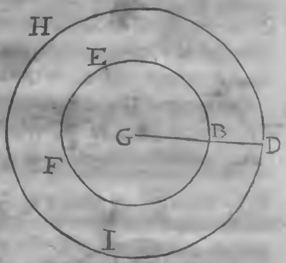


Inveniendum sit centrum oscillationis Coni recti geniti per rotationem trianguli Isoscelis ACD circa perpendiculum CF, & dependentis ab ipsius vertice C. Duc basi parallelam IEH occurrentem ipsis CA, CF, CD, in I, E, H; & sint $CF = a$, $FD = c$, $CE = z$, adeoq; $EH = \frac{cz}{a}$, & in recta EH sumpto quovis puncto B, sit $EB = x$. Tum si particulæ prismaticæ p puncto B insistentis basis sit $\dot z \dot x$ (= parallelogrammo Bb) ejusdem altitudine existente $2\sqrt{EHq - xx}$, erit particula ipsa $p = 2\dot z\dot x\sqrt{EH^2 - xx}$, atq; $p \times CB^2 = 2CE^2 \times \dot z\dot x\sqrt{EH^2 - xx} + 2xx\dot z\dot x \times \sqrt{EH^2 - xx}$. Et hæc est fluxio summæ omnium $p \times CB^2$ in recta IH. Sed si pro Area circuli cujus diameter est IH scribatur A, erit hujus fluens totalis adjacens rectæ IH æqualis $\frac{4aa + cc}{4aa}\dot z z^2 A$ (per *Quad. Curvarum*: nam in hoc casu sumuntur CE, EH, & $\dot z$ pro datis, & est $CE : EH :: a : c$.) Et hujus fluens totalis est summa omnium $p \times CB^2$ in tota figura. Sed est area A ut z^2. Sit ergò $A = nz^2$, & sumendo fluentem fiet $Q = \frac{4a^2 + c^2}{20} n^3 a^3$. Distantia autem centri gravitatis a vertice C est $\frac{3}{4} a$ [= CG], atque magnitudo Coni est $\frac{na^3}{3}$ [= P]; unde fit $CG \times P = \frac{na^4}{4}$, adeoq; distantia centri Oscillationis a puncto suspensionis C est $\frac{4a^2 + c^2}{5a}$ [= CA = CG +

D

$+ \frac{D}{CG \times P} = \frac{3}{4} a + \frac{4D}{3aP}$.] Unde etiam fit $\frac{D}{P} = \frac{3a^2 + 12c^2}{80}$ $\left(= \frac{3CF^2 + 3AD^2}{80}.\right)$

EXEMP. II.



Sit figura propoſita Sphæra. In hâc figurâ calculus commodiſſimè procedit per inventionem ipſius D, ſeu ſummæ omnium $p \times GB^2$. Sit ergò G centrum Sphæræ, DHI circulus maximus, & ſit Sphæræ radius $GD = a$. Centro G & radio quovis GB deſcribe circulum BEF, & ſit $GB = z$, & circumferentia $BEF = nz$. Tum ſumma omnium $p \times GB^2$ in circumferentia BEF erit æqualis eidem circumferentiæ ductæ in altitudinem particulæ in B ductæ in GB^2, hoc eſt $2nz^3 \sqrt{a^2 - z^2}$. Eſt ergò ſumma omnium $p \times GB^2$ in tota Sphæra æqualis fluenti ipſius $2n\dot{z}z^3 \sqrt{a^2 - z^2}$, hoc eſt, $\frac{4}{15} na^5$ [= D]. Sed eſt ipſa Sphæra æqualis $\frac{2}{3} na^3$ [= P]; Unde fit
D = CG × GA =
$\frac{D}{P} = \frac{2}{5} a^2$.

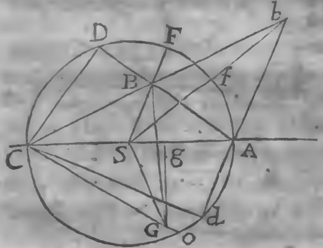
SCHOLIUM.

Per argumentationem in hac Propoſitione, corporis oſcillantis motus, tam reſpectu virium, quam reſpectu velocitatis, idem eſt, ac foret motus particulæ æqualis ſummæ omnium $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ (hoc eſt particulæ $\frac{CG^2 \times P^2}{Q}$,) oſcillantis ad diſtantiam CA. Adeoq; vice corporis cujuſvis oſcillantis ſubſtitui poteſt hujuſmodi particula ſita in ejuſdem centro Oſcillationis. Ubi ergo quæritur corporum plurium centrum Oscillationis commune, convenit singulorum centra Oscillationis seorsim quærere, & in iis substituere hujusmodi particulas vice corporum ipsorum, atque deinde quærere centrum commune oscillationis per principia hujus calculi.

PROP. XXV. PROB. XX.

Corporis cujusvis circa datum Axem revolventis invenire Centrum Percussionis in recta data.

Est Centrum Percussionis punctum in corpore circa axem mobilem, sed immotum, revolvente, quo in obstaculum impingente sistitur motus totus corporis revolventis, ita ut nec huc neq; illuc inclinet.



Constat hujusmodi puncti locum esse in plano motûs centri gravitatis; nam elementi cujusvis prismatici huic plano normalis, adeoq; axi revolutionis paralleli, motus, cum sit sibi semper parallelus, momenta ex utraq; parte hujus plani erunt æqualia; adeoque per resistentiam in eo factam sisti potest motus totus corporis revolventis.

Sit ergò C intersectio axis revolutionis cum plano motus centri gravitatis G, & quæratur centrum percussionis in recta CS transeunte per punctum C, & sit punctum illud quæsitum A. Diametro CA describe circulum CDA *d*, cujus centrum sit S; & sumptis punctis duobus, B intra circuli peripheriam, & *b* extra eandem, iis insistant particulæ duæ prismaticæ *p* axi revolutionis parallelæ. Duc AB, SB, A*b*, S*b*, circulo occurrentes in D, F, *d*, *f*, & duc CB, C*b*, CD, C*d*.

Ob

Ob motum revolutionis, punctorum velocitates absolutæ, in directionibus ipsis CB, C*b* normalibus, sunt ut distantiæ CB, C*b*. Quare impingente corpore in punctum A, particularum velocitates ad trahendum spatium circum A in partes contrarias per radios AB, A*b* erunt ut rectæ BD, *bd*. Vires ergo absolutæ particularum in extremitatibus radiorum AB, A*b*, sunt ut $p \times DB$, & $p \times db$; & harum virium efficaciæ ad corpus trahendum in partes contrarias circum A, sunt ut $p \times DB \times BA$, & $p \times db \times bA$. Ergo per conditiones Problematis, debet summa omnium $p \times DB \times BA$ intra circulum æquari summæ omnium $p \times db \times bA$ extra circulum.

Sed ex naturâ circuli est $DB \times BA = SF^2 - SB^2 = SA^2 - SB^2$, atque $db \times bA = Sb^2 - SA^2$. Unde est summa omnium $p \times SA^2 - p \times SB^2$ intra circulum æqualis summæ omnium $p \times Sb^2 - p \times SA^2$ extra circulum. Quare transferendo omnes terminos $p \times SA^2$ ad unam partem æquationis, & terminos $p \times SB^2$, $p \times Sb^2$, ad alteram partem, erit summa omnium $p \times SA^2$, tam intra quam extra circulum in universo corpore, æqualis summæ omnium $p \times SB^2$, etiam in universo corpore. Sed ductis SG & GB, & pro Corporis magnitudine scripto P, erit summa omnium $p \times SB^2$ æqualis $P \times SG^2$ plus summâ omnium $p \times GB^2$ (per *Cor.* 1. *Prop.* 24.) Item ob datum SA^2, est summa omnium $p \times SA^2 = P \times SA^2$. Proinde pro datâ summâ omnium $p \times GB^2$ scripto D, erit $P \times SA^2 = P \times SG^2 + D$, hoc est $SA^2 - SG^2 = \frac{D}{P}$.

Ad CA duc normalem G*g*, & duc CG; atque erit $SG^2 = CG^2 - CA \times Cg + SA^2$, adeoq; $SA^2 - SG^2 = CA \times Cg - CG^2$, hoc est $CA \times Cg - CG^2 = \frac{D}{P}$, seu $CA = \frac{CG^2}{Cg} + \frac{D}{P \times Cg}$. Dantur autem omnes CG, C*g*, P & D; quare etiam datur punctum A. *Q. E. I.*

C O-

COROLLARIUM.

Hinc eſt CA ad $CG+\frac{D}{P\times CG}$ ut CG ad Cg. Quare ſi recta CG occurrat circulo in O, exiſtente angulo ad O recto, adeoque & triangulis CAO, CGg ſimilibus, erit $CO=CG+\frac{D}{P\times CG}$. Unde (per *Cor.* 1. *Prop.*24.) eſt O centrum Oſcillationis. Proinde per centrum rotationis C ductâ rectâ ad centrum Oſcillationis O, ei perpendicularis OA erit locus centri Percuſſionis. Invenitur itaq; centrum Percuſſionis per calculum centri Oſcillationis.

LEMMA XI.

In Curva Logarithmica ſubtangens datur. Et ſi ſit numerus y, Logarithmus z & Subtangens illa c, erit $\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{z}}{c}$.

Hoc ab aliis paſſim demonſtratur.

HYPOTHESIS I.

Denſitas Aeris eſt oneri impoſito proportionalis.

Hoc Experimentis confirmatur.

HYPOTHESIS II.

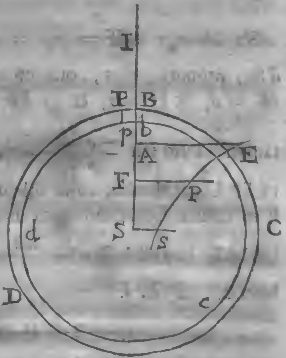
Vis Gravitatis eſt reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum a Centro Terræ.

Demonſtratur hoc a priori inter *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica.*

PROP.

PROP. XXVI. PROB. XXI.

Invenire Densitatem Atmosphæræ.



Sit S centrum Terræ, & per circulos BCD, *bcd* centro S descriptos, repræsententur superficies duæ sphæricæ ipsi Terræ concentricæ in Aere descriptæ. Tum superficies BCD sustinebit pressionem columnæ Aeris, cujus basis est eadem superficies atque altitudo æquatur altitudini BI totius Aeris supra punctum B: (per *Prop.* 20. *Lib.* 2. *Princip. Math.*) Pressio itaque in superficiei datam partem BP est ut columna Aeris totius altitudinis BI datæ basi insistentis. Sit itaq; $bp =$ BP, atque erit differentia pressionum in bases BP & bp, ut pondus aeris datæ basi insistentis, inclusi inter altitudines SB & Sb. Sit itaque SB $= x$, atque imminutâ distantiâ Bb in infinitum, fit B$b = \dot{x}$, & y densitas Aeris in B, & sit a data distantia a centro S, ad quam distantiam sit gravitas = 1 & densitas d. Tum quantitas aëris in spatio BP$p\,b$ erit ut $\dot{x}y$ (nempe ut magnitudo in densitatem,) atque vis gravitatis in B erit $\frac{aa}{xx}$ (per *Hyp.* 2) adeoq; pondus aeris inter B & b erit ut $\frac{aa\dot{x}y}{xx}$. (hoc est, ut quantitas materiæ in gravitatem.) Descendendo ergo versus centrum Terræ, erit incrementum pressionis ut $\frac{aa\dot{x}y}{xx}$.

 Sed

Sed est densitas y pressioni proportionalis (per *Hypoth.* 1.) quare est $\dot{y}$ ut $\frac{a^2 \dot{x} y}{x^3}$. Sit ergo c linea data, atq; erit $\dot{y} = -\frac{a^2 \dot{x} y}{c x^2}$, seu $\frac{\dot{y}}{y} = -\frac{a^2 \dot{x}}{c x^2}$.

Sit SA $= a$ & SF $= \frac{aa}{x} = z$, atq; ad A & F erige normales ipsis d & y proportionales; quæ proinde per eas designari possunt, ut sit AE $= d$, & FP $= y$, & sit EP curva quam punctum P perpetuò tangit. Tum erit $\frac{-aa\dot{x}}{xx} = \dot{z}$, adeoq; $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{c}$. Unde est curva EP Logarithmica, cujus subtangens est c (per *Lem.* 11.) Adeoq; si in tabulâ Logarithmorum sumantur Logarithmi proportionales ipsis AF, hoc est ipsis $a - \frac{aa}{x}$, Numeri erunt ut densitates in locis B. *Q. E. I.*

SCHOLIUM.

Si Aeris totius pondus supra B sit p (per hanc *Prop.*) erit p ad $\dot{p}$ ut y ad $\dot{y}$. Sed est $\dot{p} = \frac{aa\dot{x}y}{xx}$ (per hanc *Prop.*) Quare si sit $p = \frac{aay}{xx}$ A, hoc est, si p sit columna Aeris ejusdem densitatis y & gravitatis $\frac{aa}{xx}$ ac Aer in B, & altitudinis A, erit y ad $\dot{y}$ ut A ad $\dot{x}$, hoc est, ut c ad $\frac{a^2 \dot{x}}{x^2}$ (per hanc *Prop.*) Unde fit $c = \frac{aa}{xx}$ A. Inventâ itaq; altitudine A per Experimentum *Torricellianum*, dabitur c.

Sed per Experimentum quoddam ab *Haukesbeio* factum, constat Aeris densitatem mediocrem esse ad densitatem Aquæ ut 1 ad 820 ferè.

ferè. Eſt etiam denſitas Aquæ ad denſitatem Mercurii ut 1 ad $13\frac{1}{2}$. Quare eſt denſitas Aeris ad denſitatem Mercurii ut 1 ad 11070. Altitudo etiam Barometri mediocris eſt 30 *unc.* Quare ſi punctum B ſumatur in ſuperficie Terræ, exiſtente a radio Terræ, erit altitudo A, (adeoq; ſubtangens c) $=$ 332100 *unc.* vel 27675 *ped. Anglic.* Eſt etiam Radius Terræ pedum 20995444. Quare pro Radio Terræ ſcripto 1, erit $c = \frac{27675}{20995444}$, vel ſatis accurate in numeris minoribus $\frac{1}{760}$. Et hinc reſpectu Logarithmorum communium, in quibus

eſt 1 *Log.* ipſius 10, eſt	Pes Anglicanus partium	0.00001569
	Mille paſſus Anglican.	0.082856 . .
	Radius Terræ .	329.47 . . . . .

Ex hac Propoſitione conſtat, Aeris denſitatem, etiam ad diſtantiam infinitam a Centro Terræ, eſſe quantitatis finitæ; nam exponitur ea per Logarithmicæ ordinatam S*s* ad Centrum Terræ. Proinde ſi Aeris vis elaſtica tanta ſit, ut ad hunc gradum raritatis pervento etiam adhuc ſit denſitas compreſſioni proportionalis, Atmoſphæra Terræ vere in infinitum extendetur, atque erit quantitas Aeris in toto Syſtemate Mundano vere infinita; utpote quæ major ſit quam totum ſpatium infinitum ductum in datam denſitatem S*s*. Sed vires naturales non in infinitum extenduntur: quare pluſquam probabile eſt, Aeris vim elaſticam, poſtquam ad certum gradum raritatis perventum eſt, ſubinde continuò langueſcere, adeoque denſitatem ſubinde decreſcere in ratione continuò minori quam ponderis imminuti, atque Atmoſphæram eo pacto revocari intra limites finitos, eoſque fortaſſe ſatis arctos.

HYPOTHESIS III.

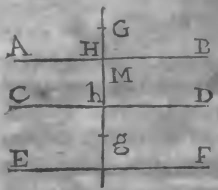
Radii Lucis conſtant ex particulis corporeis, atque Refractio Lucis fit per attractionem mutuam Lucis & Mediorum refringentium, atque hæc Attractio decreſcit in tam magna ratione diſtantiarum a corporibus, ut non ſit ſenſibilis, niſi in ipſo ferè contactu; eſtque cæteris paribus, ut corporum denſitas.

Hæc

Hæc omnia abunde comprobantur in Libro Opticorum *Newtoni.*

LEMMA XII.

Si ſint Media plura ſimilaria, planis parallelis ab invicem diſtincta, quorum vires attractrices ſunt tantum in diſtantiis minimis ſenſibiles; corporis per Media iſta tranſeuntis velocitas, ubi in Medium aliquod pervenerit, eadem erit, ac ſi per Media jam præterita non tranſiiſſet, ſed cum primâ ſuâ velocitate directè incidiſſet in vires attractrices iſtius Medii, in quo jam verſatur.



Diſtinguantur duo quævis Media contigua planis per rectas parallelas AB, CD, EF repræſentatis, atq; ducatur iſtis normalis GH hg occurrens AB & CD in H & h. Sume hinc inde HG & hg æquales diſtantiis in quibus incipit ac deſinit attractio Medii ABDC. Tum quoniam Mediorum actio eſt uniformis, quantum motus additur corpori pergenti de G verſus M, tantum aufertur per contrariam actionem ejuſdem medii eodem perveniente in g; atque idem eveniet in tranſitu corporis per media reliqua. Reſtat ergò ut omnis mutatio motus ubi corpus pervenerit in g, oriatur ex ſolâ actione medii CDEF, in quo jam verſatur.

COROLLARIUM.

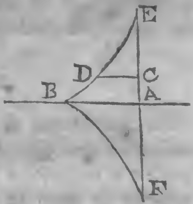
Hinc motus Lucis in Medio aliquo idem eſt, ſive in illud primùm inciderit, ſive per alia Media jam tranſierit, (per *Hypoth.* 3.)

LEMMA XIII.

Si in datis diſtantiis Mediorum Vires attractrices ſunt ut ipſorum Denſitates, erit Lucis velocitas in Medio in dimidiata ratione denſitatis Medii quantitate data auctæ.

Sit

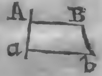
Sit AB superficies Medii jacentis ad partes F. Duc EAF ipsi AB normalem, atque ad punctum C in rectâ EA erige normalem CD proportionalem Medii vi attractrici in C, atq; sit EDBFE area tota quam describit ordinata CD. Tum erit incrementum quadrati velocitatis particulæ transeuntis per totam regionem at-



tractionis Medii EF, ut spatium totum EDBF (per *Propp.* 39 & 40. *Lib.* I. *Princip. Math.*) Sed quoniam, ex hypothesi, Attractiones in datis distantiis sunt ut Densitates Mediorum, ergò sunt areæ integræ EDBFE ut eædem densitates; adeoque incrementum quadrati velocitatis est ut Medii densitas. Si itaque quadratum velocitatis datæ in vacuo, ante ingressum in spatium EF, sit ad incrementum ejusdem in transitu per hoc spatium, ut data quantitas ad densitatem in uno casu, erit semper quadratum velocitatis datæ in vacuo ad ejusmodi incrementum, ut idem Datum ad densitatem: adeoque conjunctim quadratum velocitatis post transitum per spatium EF erit ad quadratum velocitatis datæ in vacuo, ut densitas plus dato ad datum; & proinde ipsæ velocitates erunt in hâc ratione dimidiatâ; adeoque velocitas in Medio est semper in dimidiatâ ratione densitatis plus dato. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc in transitu Lucis per Medium inæqualiter densum, qualis est Atmosphæra Terræ, Vis acceleratrix est ut fluxio densitatis applicata ad fluxionem distantiæ inter densitates. Nam sit *Aa* linea in cujus dire-



ctione variatur densitas, & sint ordinatæ AB, *ab* ut vires acceleratrices in A & *a*, & sit B*b* curva quam describit punctum B. Tum erit area AB*ba* ut incrementum quadrati velocitatis particulæ pergentis de A in *a*, (per *Prop.* 39. *Lib.* I. *Princip. Math.*) hoc est, ut incre-

 mentum

mentum densitatis (per hoc *Lemma*). Quare imminutâ distantiâ Aa in infinitum, erit vis acceleratrix AB ut fluxio densitatis applicata ad Aa, hoc est, ad fluxionem distantiæ inter densitates.

SCHOLIUM.

Per experientiam ab *Haukesbeio* factam, est sinus refractionis Radii Lucis a vacuo incidentis in Aerem ad superficiem Terræ, ad sinum incidentiæ ut 999736 ad 1000000. Ergo in hâc ratione est Lucis velocitas in vacuo ad ejusdem velocitatem in Aere ad superficiem Terræ. (per *Prop* 95. *Lib.* I. *Princip. Math.*) Sit ergo 1 quantitas data, atque repræsentetur densitas Aeris ad superficiem Terræ per d: tum (per hoc *Lem.*) erit $1 : \sqrt{1+d} :: 999736 : 1000000$, adeoq; $d = 0.00052828$.

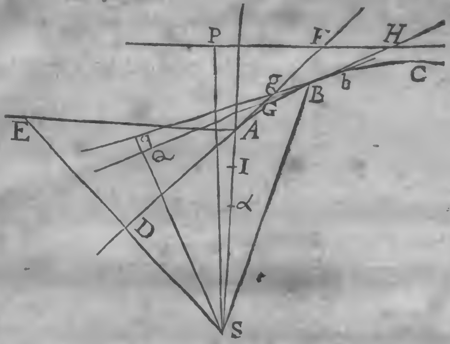
Et in genere, si Aeris densitas designetur per y, & constituatur triangulum rectangulum ABC, cujus basis AB sit ad hypothenusam AC, ut sinus refractionis ad sinum incidentiæ a vacuo, datâ basi AB erit perpendiculum BC ut $\sqrt{y}$.

PROP. XXVII. PROB. XXII.

Invenire Refractionem Lucis per Atmosphæram Terræ transeuntis.

Sit S Centrum Terræ, ABC Radius Lucis incurvatus, quem tangant rectæ AG; BG in A & B, sibi mutuo occurrentes in G, atque ad tangentes demittantur perpendiculares SD, SQ, & ducantur SA, SB; atque ad A ducatur ipsi SA normalis AE occurrens SD in E, & sit A punctum in Radio datum, B punctum variabile. Et sint $SA = a$, $SD = b$, $SE = t \left(= \frac{aa}{b},\right)$ $SB = x$, d densitas in A, y densitas in B.

Cur-



Curvatura Radii pendet ab Aeris vi refringente attractrice, (per *Hypoth.* 3) quæ semper dirigitur versus majorem densitatem, hoc est versus Centrum Terræ, (per *Prop.* 26.) Est ergo hæc Curva de genere Trajectoriarum genitarum per vires Centripetas.

Est autem velocitas Lucis in A ad velocitatem in B ut $\sqrt{1+d}$ ad $\sqrt{1+y}$ (per *Lem.* 13.) Quare est $SQ : SD :: \sqrt{1+d} : \sqrt{1+y}$ (per *Cor.* 1. *Prop.* 1. *Lib.* I. *Princ. Math.*) Unde est $SQ = \frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1+y}} b$, adeoque $BQ = \sqrt{x^2 - \frac{1+d}{1+y} b^2}$. Et hinc, ubi punctum B est infinite distans, pœnè evanescente y, ita ut tutò negligi possit, erit perpendilaris ad tangentem jam factam Asymptoton, $= \sqrt{1+d} \times b$ Sit Asymptotos illa PH, occurrens tangentibus AG, BG in F & H, existente eidem perpendiculari SP.

Moveatur tangens BG in locum novum proximum bg occurrentem perpendiculari SQ in q. Tum erit angulus nascens g BG fluxio anguli FGH vel anguli FHG; hoc est, crescente x, incrementum anguli

guli HGF & decrementum anguli FHG; ob datum angulum ad F. Atque radio existente 1, arcus proportionalis angulo nascenti QBq est $\frac{Qq}{QB}$. Est autem Qq fluxio ipsius SQ ($=\sqrt{\frac{1+d}{1+y}}\,b$): quare est $Qq = -\frac{1}{2}\dot{y}\frac{\sqrt{1+d}}{\overline{1+y}|^{\frac{3}{2}}}$; hoc est $Qq = \frac{a^2 y \dot{x}\sqrt{1+d}}{2cx^2 \times \overline{1+y}|^{\frac{3}{2}}}\,b$, (ob $\dot{y} = \frac{-a^2 y \dot{x}}{c x^2}$ per *Prop.* 26.) Unde fit $\frac{Qq}{QB}$, hoc est fluxio anguli

$$\dot{F}GH = \frac{a^2 b y \dot{x}\sqrt{1+d}}{2cx^2 \times \overline{1+y}|^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2\frac{1+d}{1+y}b^2}} \text{ vel } \frac{a^2 b y \dot{x}}{2cx^2 \times \overline{1+y} \times \sqrt{\frac{1+y}{1+d}x^2 - b^2}}$$

Inventa itaque fluente hujus expressionis per Methodum Inversam Fluxionum, dabitur angulus FGB. Sed datur angulus GBS per valorem perpendicularis SQ, atq; est angulus SDG rectus; unde dabitur angulus DSB. Adeoq; ex datâ distantiâ SB ($=x$), densitate in B ($=y$), & angulo SAD, dabitur positio rectæ SB, adeoq; punctum B; hoc est, dabitur figura Radii refracti ABC. *Q. E. I.*

Sed hæc fluxio $\frac{a^2 b y \dot{x}}{2cx^2 \times \overline{1+y}\sqrt{\frac{1+y}{1+d}x^2 - b^2}}$ ad fluentem in terminis numero finitis irreducibilis est. Quare ad computandam Atmosphæræ refractionem in usus Astronomicos, quærenda est series, quæ sit apta ad calculum instituendum per approximationes. Ergò ut fluxio hæc revocetur ad terminos quantum fieri potest simplicissimos, pro x scribe $\frac{aa}{z}$, atque fluxio fiet $\frac{-by\dot{z}}{2c\times\overline{1+y}\sqrt{\frac{1+y}{1+d}\frac{a^4}{z^2} - b^2}}$, vel

$\frac{-yz\dot{z}}{2c\times\overline{1+y}\sqrt{\frac{1+y}{1+d}\frac{a^4}{b^2} - z^2}}$, h. e. (neglecto signo) $\frac{yz\dot{z}}{2c\times\overline{1+y}\sqrt{\frac{1+y}{1+d}tt - zz}}$

existente

existente etiam $\dot{y} = \frac{y\dot{z}}{c}$. Sed ad superficiem Terræ, ubi est $y = d$, est hæc fluxio $\frac{yz\dot{z}}{2c + 2cd\sqrt{tt - zz}}$; & ad distantiam infinitam (ubi etiam fluxio ipsa evanescit,) differt ab hac forma minus parte millesimâ. Quare neglectis istiusmodi minutiis, pro Fluxione illa tutò sumi potest $\frac{yz\dot{z}}{2c + 2cd\sqrt{tt - zz}}$. Seposito itaque coefficiente dato $\frac{1}{2c + 2cd}$, fluentem ipsius $\frac{yz\dot{z}}{\sqrt{tt - zz}}$ quæro ope Propositionis undecimæ, ut sequitur.

Pro $\sqrt{tt - zz}$ scribe x, atque erit $\dot{x} = \frac{-z\dot{z}}{x}$, & Fluxio proposita erit $\frac{yz\dot{z}}{x}$ vel etiam $-y\dot{x}$. Est etiam $\dot{y} = \frac{y\dot{z}}{c}$. Itaque secundùm *Prop.* 11. sit $r = y\dot{z}$, $s = \frac{z}{x}$, $w = \dot{z} = \frac{-x\dot{x}}{z}$. Tum capiendo fluxiones, easque continuò applicando ad $\dot{w}$, erit $\dot{s} = \frac{z^2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{tt}{x^3}$, $\ddot{s} = \frac{3z^3}{x^5} + \frac{3z}{x^3} = \frac{3ttz}{x^5}$, $\dddot{s} = \frac{15z^4}{x^7} + \frac{18z^2}{x^5} + \frac{3}{x^3} = \frac{15ttz^2}{x^7} + \frac{3tt}{x^5}$, & sic porrò. Hinc autem per formationes terminorum constat, quod si sit n distantia termini alicujus $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. a termino primo s, exprimetur $\overset{n}{s}$, (hoc est $\dot{s}$, si n sit 1, $\ddot{s}$ si n sit 2, &c.) vel per seriem hujus formæ,

$$\overset{n}{s} = A\frac{z^{n+1}}{x^{2n+1}} + B\frac{z^{n-1}}{x^{2n-1}} + C\frac{z^{n-3}}{x^{2n-3}} + D\frac{z^{n-5}}{x^{2n-5}} + \text{\&c.}$$

 vel

vel per seriem hujus formæ,

$\overset{n}{s} = tt \times A\frac{z^{n-1}}{x^{2n+1}} + B\frac{z^{n-3}}{x^{2n-1}} + C\frac{z^{n-5}}{x^{2n-3}} + \&c.$ Coefficentes autem A, B, C, D, &c. in harum serierum primâ investigo ad hunc modum. Juxta notationem autem nostram sint $\dot{n}, \ddot{n}, \dddot{n}$, &c. valores ipsius n præcedentes, & $\underset{,}{n}, \underset{,,}{n}, \underset{,,,}{n}$, &c. ejusdem valores subsequentes, ut in Introductione explicavimus. Capiendo fluxiones seriei, primò in x, deinde in z, & terminos prodeuntes continuo applicando ad $\dot{w}$, erit,

$$\dot{\overset{n}{s}} = \overline{2n+1}\,A\,\frac{\underset{,}{z}^{n+1}}{\underset{,}{x}^{2n+1}} + \left.\begin{matrix}\overline{2n-1}\,B\\ +\overline{n+1}\,A\end{matrix}\right\}\frac{\underset{,}{z}^{n-1}}{\underset{,}{x}^{2n-1}} + \left.\begin{matrix}\overline{2n-3}\,C\\ +\overline{n-1}\,B\end{matrix}\right\}\frac{\underset{,}{z}^{n-3}}{\underset{,}{x}^{2n-3}} \begin{matrix}+\\+\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}+\overline{2n-5}\,D\\ +\overline{n-3}\,C\end{matrix}\right\}\frac{\underset{,}{z}^{n-5}}{\underset{,}{x}^{2n-5}} + \&c.$$

Hinc novum A fit $\overline{2n+1}A$. Unde constat ipsum A formari per continuam multiplicationem terminorum 1, 3, 5, 7, &c. quorum ultimus & maximus sit $2n-1$. In sequentibus autem vice $2n-1$ scribe m, atque erit $\underset{,}{A} = \underset{,}{m}A$.

Item per terminum secundum est $\underset{,}{B} = mB + \underset{,}{n}A$. Si fieri potest ut B producatur ab A per multiplicationem & divisionem, sit $B = \frac{Q}{R}A$. Tum erit $\underset{,}{B} = \frac{\underset{,}{Q}}{\underset{,}{R}}\underset{,}{A} = \frac{\underset{,}{Q}}{\underset{,}{R}}\underset{,}{m}A$. Unde eliminatis B & $\underset{,}{B}$ ab æquatione priori, & simul evanescente A, erit $\frac{\underset{,}{m}\underset{,}{Q}}{\underset{,}{R}} = \frac{mQ}{R} + \underset{,}{n}$, hoc est $\frac{\underset{,}{m}Q}{\underset{,}{R}} + \frac{\underset{,}{m}\underset{,}{Q}}{\underset{,}{R}} = \frac{mQ}{R} + \underset{,}{n}$. Ut reducetur hæc

æquatio

æquatio ad terminos simplicissimos pono $\frac{m_{,}Q}{R_{,}} = \frac{mQ}{R}$, hoc est $\frac{m_{,}}{R_{,}} = \frac{m}{R}$. Unde fit $\frac{m_{,}}{R_{,}} \underset{.}{Q} = n_{,}$. Sed est $\frac{m_{,}}{R_{,}}$ novus valor ipsius $\frac{m}{R}$, unde est $\frac{m}{R}$ quantitas data, adeoque $R = m$, indeque $\underset{.}{Q} = n_{,}$, & sumendo integrales $Q = \frac{n_{,}n}{2} + p$. Sed debet esse $B = 0$ ubi $n = 0$; adeoq; est $p = 0$, atque $Q = \frac{n_{,}n}{2}$. Unde fit $B = \frac{n_{,}n}{2m} A$. Et hinc $B_{,} = \frac{m n_{,,}}{n} B$.

Per terminum tertium est $\underset{.}{C} = \dot{m} C + \dot{n} B$. Pono $C = \frac{Q}{R} B$, & fit $C_{,} = \frac{Q_{,}}{R_{,}} B_{,}$, hoc est $\frac{Q_{,} m n_{,,}}{R_{,} n} B = \frac{\dot{m} Q}{R} B + \dot{n} B$, seu $\frac{Q_{,} m n_{,,}}{n R_{,}} + \frac{m n_{,,}}{n R} \underset{.}{Q} = \frac{\dot{m} Q}{R} + \dot{n}$. Pone $\frac{m n_{,,}}{n R_{,}} = \frac{\dot{m}}{R}$, hoc est, $\frac{m n_{,,} n_{,}}{R_{,}} = \frac{\dot{m} n_{,} n}{R}$, ut fiat $\frac{m n_{,,}}{n R_{,}} \underset{.}{Q} = \dot{n}$. Sed est $\frac{m n_{,,} n_{,}}{R_{,}}$ novus valor ipsius $\frac{\dot{m} n_{,} n}{R}$. Unde fit $R = \dot{m} n_{,} n$, adeoq; $\underset{.}{Q} = n \underset{.}{n} \dot{n}$, indeq; $Q = \frac{n_{,} n \dot{n} \ddot{n}}{4}$. Unde fit $C = \frac{\dot{n} \ddot{n}}{4m} B$, atque $C_{,} = \frac{\dot{m} n_{,,}}{\ddot{n}} C$.

Per

Per terminum quartum eſt $\underset{,}{D} = \overset{''}{m} D + \overset{'''}{n} C$. Unde ad eundem modum invenitur $D = \frac{\overset{'''}{n}\,\overset{''''}{n}}{6\overset{''}{m}} C$, atque $\underset{,}{D} = \frac{\overset{''}{m}\,\overset{n}{''}}{\overset{'''}{n}}$. Ex terminis autem jam appoſitis ſatis conſtat modus formandi cæteros. Unde ſi jam pro totis terminis cum ſuis ſignis ſcribantur A, B, C, &c. erit

$$\overset{n}{s} = \overline{1.3.5}\ldots\overline{2n-1}\,\frac{z^{n+1}}{x^{2n+1}} + \frac{\underset{,}{nn}}{2m}\,\frac{xx}{zz}A + \frac{\overset{'}{n}\,\overset{''}{n}}{4\overset{,}{m}}\,\frac{xx}{zz}B + \&c.$$

hoc eſt

$$\overset{n}{s} = \frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}\,z^{n+1}}{x^{2n+1}} + \frac{\overline{n+1}.n}{2\times\overline{2n-1}}.\frac{xx}{zz}A + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{4\times\overline{2n-3}} \times \frac{xx}{zz}B + \frac{\overline{n-3}\ \overline{n-4}.xx}{6\times\overline{2n-5}.zz}C + \&c.$$

Et ad eundem modum inveniuntur coefficientes in ſerie alterâ, ut ſit etiam

$$\overset{n}{s} = \frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}\,ttz^{n-1}}{x^{2n+1}} + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.xx}{2\times\overline{2n-1}\ zz}A + \frac{\overline{n-3}\ \overline{n-4}.xx}{4\times\overline{2n-3}\,zz}B + \frac{\overline{n-5}.\overline{n-6}\ xx}{6\times\overline{2n-5}\ zz}C + \&c.$$

Quinetiam ſi jam ſit m diſtantia termini alicujus s, $\overset{'}{s}$, $\overset{''}{s}$, &c. a termino s, pro n ſcripto $-m$ exprimetur etiam $\underset{\cdot}{\overset{m}{s}}$ per eaſdem ſeries. In hoc autem caſu inveniendus eſt coefficiens termini primi, ut fecimus in Propoſitione duodecimâ. Debet enim eſſe $2n-1$, hoc eſt $-2m-1$, maximus factorum 1, 3, 5, 7, &c. in coefficiente illo. Et hic coefficiens ſic ſcribi poteſt $\frac{\overline{2n-1}\ldots 5.3.1.-1.-3.-5.\&c.}{-1.-3.-5.\&c.}$ hoc eſt, $\frac{\overline{-2m-1}.\overline{-2m-3}\ \overline{-2m-5}.\&c.}{-1.-3.-5.-7.\&c.}$. Incidente autem n inter numeros negativos, adeoq; & m inter numeros affirmativos 1, 2, 3, &c.

omnes

omnes factores $\overline{-2m-1}.\ \overline{-2m-3}.\ \overline{-2m-5}.$ &c. in numeratore tolluntur per similes factores in denominatore. Unde relinquitur ut in isto casu sit coefficiens termini primi

$\frac{1}{-1.-3.-5.\ldots\overline{-2m-1}}$, atq; sit $\overset{m}{s} = \frac{z^{-m+1}}{-1.-3.-5.\overline{-2m+1}\,x^{-2m+1}} +$ $+ \frac{\overline{-m+1}.\,\overline{-m}}{2.\,\overline{-2m-1}}\,\frac{xx}{zz}\,A + \frac{\overline{-m-1}.\,\overline{-m-2}.\,xx}{4.\,\overline{-2m-3}\quad zz}\,B$ &c. vel

$$\overset{m}{s} = \frac{x^{2m-1}}{-1.-3.-5.\ldots\overline{-2m+1}.\,z^{m-1}} + \frac{\overline{-m+1}.\,m\,xx}{2.\,\overline{2m+1}\quad zz}\,A +$$
$$+ \frac{\overline{-m-1}.\,\overline{m+2}.\,xx}{4.\,\overline{2m+3}.\quad zz}\,B + \frac{\overline{-m-3}.\,\overline{m+4}.\,xx}{6.\,\overline{2m+5}\quad zz}\,C + \text{\&c.}$$

hoc est per seriem priorem. Et hæc series quidem est præstantior ad inveniendas fluentes $\overset{\prime}{s}, \overset{\prime\prime}{s}, \overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. altera autem ad inveniendas fluxiones $\dot{s}, \ddot{s}, \dddot{s}$, &c.

Porrò est $\dot{r} = y\dot{z}$, atque $\dot{y} = \frac{y\dot{z}}{c}$. Unde sumendo fluentes purè fit $r = cy$, $\overset{\prime}{r} = c^2 y$, $\overset{\prime\prime}{r} = c^3 y$, &c. item sumendo fluxiones, $\dot{r} = y$, $\ddot{r} = \frac{y}{c}$, $\dddot{r} = \frac{y}{c^2}$, &c. Unde observatis signis, per hos valores ipsorum s, $\dot{s}$, $\ddot{s}$, &c. $\overset{\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. r, $\overset{\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, &c. $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c. fit angulus FHG $\left(= \frac{1}{2c+2cd} \times \overline{rs - \overset{\prime}{r}\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\ddot{s} - \text{\&c.}}\right) = \frac{1}{2c+2cd}$ in hanc seriem,

$$\left\{\begin{array}{l} cy \times \frac{z}{x} \\ -\,c^2 y \times \frac{tt}{x^3} \\ c^3 y \times \frac{3ttz}{x^5} \\ -\,c^4 y \times \overline{\frac{1.3.5\,ttz^2}{x^7} + \frac{1}{5}\,\frac{x^2}{z^2}\,A} \\ \text{\&c.} \end{array}\right.$$

atque

atque angulus FGH ($\frac{1}{2c+2cd} \times -\dot{r}\acute{s} + \ddot{r}\overset{\prime\prime}{s} - \dddot{r}\overset{\prime\prime\prime}{s}$ &c. $-$ P) æqualis $\frac{1}{2c+2cd}$ in hanc seriem

$$\left\{\begin{array}{l} y \times x \\ \overline{\frac{y}{c} \times \frac{x^3}{1.3z} + \frac{-1}{5}\frac{x^2}{z^2}A + \frac{-3}{7}\frac{x^2}{z^2}B + \&c.} \\ \frac{y}{c^2} \times \frac{x^5}{1.3.5z^2} + \frac{-3}{7}\frac{x^2}{z^2}A + \frac{-5}{9}\frac{x^2}{z^2}B + \&c. \\ \&c. \quad - P \end{array}\right.$$

Ubi est P valor ejusdem Seriei prodiens per ipsorum z, x, y valores in puncto A.

Potest etiam alia series inveniri pro angulo FGH; nempe ita corrigendo Fluentes r, $\acute{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, &c. ut omnes evanescant in puncto A, ubi est $z = a$. Ut hoc fiat pone $z = a - v$, unde fit $\dot{z} = -\dot{v}$, & fluxio anguli FHG fit $\frac{\dot{v}yz}{x}$ in $\frac{1}{2c+2cd}$. Posito itaq; $s = \frac{z}{x}$ (ut prius) erit $\dot{r} = \dot{v}y$, existente $\dot{w} = -\dot{v}$, atq; $\dot{y} = \frac{-\dot{v}y}{c}$. Unde fit $\dot{r} = -c\dot{y}$, adeoque $r = cd - cy$, (quoniam est d valor ipsius y in puncto A,) indeque $r\dot{w} = -cd\dot{v} + cy\dot{v} = -cd\dot{v} - c^2\dot{y}$, adeoq; $\acute{r} = c^2d - cdv - c^2y$, & inde $\ddot{r} = c^3d - c^2dv + \frac{cdv^2}{2} - c^3y$, $\dddot{r} = c^4d - c^3dv + \frac{c^2dv^2}{2} - \frac{cdv^3}{2.3} - c^4y$, & sic porrò. Unde fit angulus FGH æqualis $\frac{1}{2c+2cd}$ in

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{cd - cy} \times \frac{z}{x} \\ -\overline{c^2d + cdv + c^2y} \times \frac{tt}{x^3} \\ \overline{c^3d - c^2dv + \frac{cdv^2}{2} - c^3y} \times \frac{3ttz}{x^5} \\ \overline{-c^4d + c^3dv - \frac{c^2dv^2}{2} + \frac{cdv^3}{2.3} + c^4y} \times \overline{\frac{1.3.5\,ttz^2}{x^7} + \frac{1}{5}\frac{x^2}{z^2}A} \\ \&c. \end{array}\right.$$

Et

Et hinc fit summa angulorum FHG, FGH, hoc est angulus GFH

æqualis $\frac{1}{2c + 2cd}$ in

$$\left\{\begin{array}{l} cd \times \frac{z}{x} \\ - \overline{c^2 d + cdv} \times \frac{tt}{x^3} \\ \overline{c^3 d - c^2 dv + \frac{cdv^2}{2}} \times \frac{3ttz}{x^5} \\ - \overline{c^4 d + c^3 dv - \frac{c^2 dv^2}{2} + \frac{cdv^3}{2.6}} \times \overline{\frac{1.3.5\,ttz^2}{x^7} + \frac{1}{5}\frac{x^2}{z^2} A}. \end{array}\right.$$

Ubi angulus SAD est satis parvus, commode invenitur angulus GFH per hanc seriem. Sed ubi est angulus SAD nimis magnus, quærendus est angulus FGH per seriem alteram.

Potest & alia series inveniri pro angulo FGH, per Propositionem septimam. Sit enim Q fluens ipsius $\frac{-z\dot{z}y}{x}$, hoc est ipsius $\dot{x}y$, Tum per Propositionem illam, quo tempore x fit $x \pm v$, fiet Q $= Q \pm \frac{\dot{Q}}{\dot{x}} v + \frac{\ddot{Q}}{2\dot{x}^2} v^2 \pm \frac{\dddot{Q}}{2.3\dot{x}^3} v^3 + \&c.$ nempe fluente uni- ormiter x. Unde si pro x sumatur ipsius valor in puncto aliquo ıto I, & sit $x - v$ ejusdem valor in A, & $x + v$ ejusdem valor ı α, valor fluentis in puncto A erit $Q + \frac{\dot{Q}}{\dot{x}} v + \frac{\ddot{Q}}{2\dot{x}^2} v^2 + \frac{\dddot{Q}}{2.3\dot{x}^3} v^3 + \&c.$ & valor fluentis in puncto α erit $Q - \frac{\dot{Q}}{\dot{x}} v + \frac{\ddot{Q}}{2\dot{x}^2} v^2 - \frac{\dddot{Q}}{2.3\dot{x}^3} v^3 + \&c.$ Quo valore dempto a valore altero, residuum erit Fluentis pars adjacens rectæ $A\alpha$; adeoq; si sit $SB = \frac{SA^2}{S\alpha}$, erit

angulus

angulus FGH $= \frac{1}{c + cd} \times \frac{\dot{Q}}{\dot{x}} v * + \frac{\ddot{Q}}{2.3\dot{x}^3} v^3 * + \frac{\dddot{Q} v^5}{2.3.4.5\dot{x}^5}$ + &c. In hoc casu autem pro $\dot{x}$ scripto 1, est $\dot{z} = \frac{x}{z}$, & $\dot{y} = \frac{-xv}{cz}$. Unde existente $\dot{Q} = y$, fiunt $\ddot{Q} = \frac{y}{cz^2} \times \overline{\frac{x^2}{c} - \frac{tt}{z}}$, $\ddddot{Q} = \frac{y}{c^2 z^4} \times \overline{\frac{x^4}{cc} - \frac{6ttx^2}{cz} + \frac{3tt}{z} \times \overline{z - c} \times \frac{1 + 5x^2}{z^2}}$. &c.

SCHOLIUM.

In hâc Curvâ Radius Curvaturæ est $\frac{\overline{2 + 2y} \times c \times SB\ cub.}{y \times SQ \times SA\ quad.}$; quod in puncto A est $\frac{\overline{2 + 2d} \times c \times SA}{d \times SD}$; & ubi angulus SAD est rectus, est $\frac{\overline{2 + 2d}}{d} c$. Quod per valores c & d (*Schol. Prop.* 26. & *Schol. Lem.* 13.) est 5 SA, circiter, existente SA Radio Terræ. Proinde curvatura Radii Luminis horizontalis, ad superficiem Terræ, est ad curvaturam Circuli maximi Terræ, ut 1 ad 5. Velocitas autem Luminis est ad velocitatem Corporis revolventis in Circulo maximo Terræ, cum vi Gravitatis, circiter ut 40000 ad 1. Unde est Aeris vis refringens ad vim Gravitatis in superficie Terræ circiter ut 320000000 ad 1. Nam in datâ inclinatione Trajectoriarum ad directionem Virium centripetarum, Vires illæ sunt in ratione composita Flexurarum & quadratorum Velocitatum.

F I N I S.